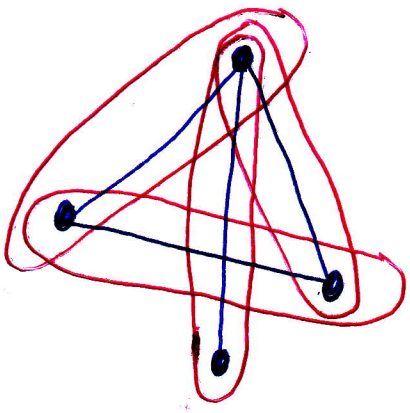
BÝTI INCIDENTNÍ – UZEL INCIDUJE S HRANOU A HRANA INCIDUJE S UZLEM, PRÁVĚ TEHDY, POKUD TEN DANÝ UZEL SE NACHÁZÍ JAKO PRVEK V TÉ DVOUPRVKOVÉ MNOŽINĚ HRANY.

SOUSEDNÍ UZLY: DVA UZLY NAZVEME SOUSEDNÍMI, PRÁVĚ TEHDY, POKUD (KDYŽ) INCIDUJÍ SE STEJNOU HRANOU.

($\Leftrightarrow$ = PRÁVĚ TEHDY KDYŽ)

ZÁPIS JINAK: VRCHOLY u, v JSOU SOUSEDNÍ $\Leftrightarrow$ EXISTUJE HRANA e TAKOVÁ, ŽE e SE ROVNÁ u, v. $\Leftrightarrow \exists e, e = \{u, v\}$

V KROUŽKU JSOU ZOBRAZENY SOUSEDNÍ UZLY



ÚPLNÝ GRAF: K_n

KRUŽNICE SE ZNAČÍ: C_n ← n koresponduje s počtem uzlů

CESTA P_n ← tady n koresponduje s počtem hran

CHARAKTERISTIKY CESTY:

$|E(P_n)| = n$

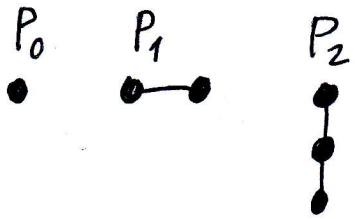
$|V(P_n)| = n+1$

CO TO JE CESTA? CESTA JE TAKOVÝ GRAF:

1) MEZI LIBOVOLNÝMI DVĚMA UZLY EXISTUJE POSLOUPNOST HRAN

2) NEOBSAHUJE KRUŽNICI

3) KAŽDÝ UZEL INCIDUJE S JEDNOU NEBO DVĚMA HRANAMI, VE SPECIÁLNÍM PŘÍPADĚ SE ŽÁDNOU HRANOU.



NEOBSAHUJE CESTU, PROTOŽE UZEL INCIDUJE SE TŘEMI HRANAMI.
$\Rightarrow$ NENÍ CESTA

DISKRÉTNÍ GRAF D_n

$|V(D_n)| = n$

$|E(D_n)| = 0$

NULA, PROTOŽE NEOBSAHUJE ŽÁDNOU HRANU

DEFINICE: GRAF, KTERÝ NEOBSAHUJE ŽÁDNOU HRANU.

ÚPLNÝ BIPARTITNÍ GRAF $K_{m,n}$

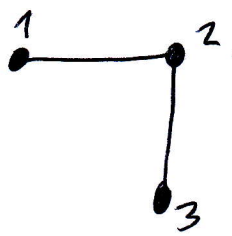
ÚZTAM NELZE ŽÁDNOU HRANU PŘIDAT

DVOUČÁSTOVÝ GRAF

JE TO GRAF, KDE DOKÁŽEME MNOŽINU UZLŮ ROZDĚLIT NA DVĚ PODMNOŽINY

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2$$



$V = \{1, 2, 3\}$

$V_1 = \{1, 3\}$

$V_2 = \{2\}$

$e_1 = \{1, 2\}$

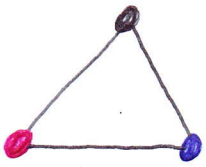
$e_2 = \{2, 3\}$

ANO, JE DVOUČÁSTOVÝ GRAF

P_2

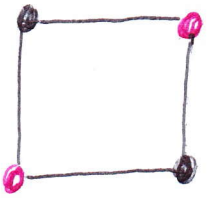
K OBARVENÍ STAČILI DVĚ BARVY, PROTO UŽ VÍM, ŽE JE BIPARTITNÍ, JIŽ NELZE SPOJOVAT UZLY, PROTOŽE BY SE SPOJOVALY UZLY STEJNÉ BARVY (ČERVENÉ), PROTO JE TO ÚPLNÝ BIPARTITNÍ GRAF

C_3



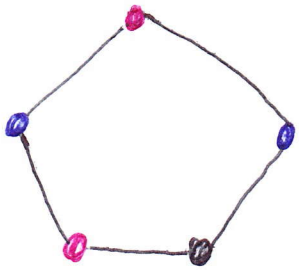
PROTOŽE UZEL NEMŮŽE SOUSEDIT S UZLEM STEJNÉ BARVY, TAK NENÍ JINÁ MOŽNOST NEŽ OBARVIT UZEL KAŽDÝ JINOU BARVOU, JELIKOŽ JSEM NEPOUŽIL PRÁVĚ DVĚ BARVY, TAK TO NENÍ BIPARTITNÍ GRAF

C_4

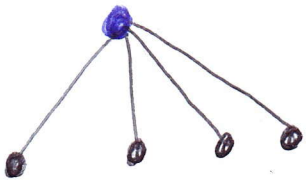


ÚPLNÝ BIPARTITNÍ GRAF

JIŽ NELZE SPOJOVAT UZLY, PROTOŽE BY SE SPOJOVALI UZLY STEJNÉ BARVY, POUŽIL JSEM PRÁVĚ DVĚ BARVY

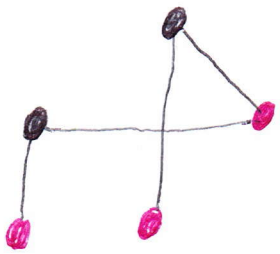


NENÍ BIPARTITNÍ GRAF

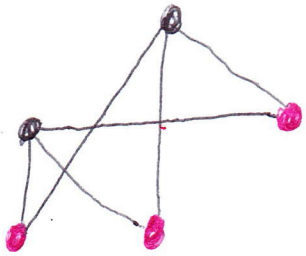


ÚPLNÝ BIPARTITNÍ GRAF (SPOJOVAT UZLY JIŽ NELZE, PROTOŽE BY SE SPOJOVALY UZLY STEJNÉ BARVY)

P_4



BIPARTITNÍ GRAF



ÚPLNÝ BIPARTITNÍ GRAF
(NELZE JIŽ PŘIDAT ŽÁDNOU HRANU, PROTOŽE SE NESMÍ SPOJOVAT UZLY STEJNÉ BARVY)

PODMÍNKY:

MNOŽINA $V(K_{m,n})$ → ROZDĚLÍM JI NA DVĚ DISJUNKTNÍ ČÁSTI

1) $V(K_{m,n}) = V_1(K_{m,n}) \cup V_2(K_{m,n})$

ZARUČENÍ DISJUNKTNOSTI, $V_1(K_{m,n})$ PRŮNIK $V_2(K_{m,n})$ JE PRÁZDNÁ MNOŽINA, JSOU DISJUNKTNÍ, NEMAJÍ SPOLEČNÝ ŽÁDNÝ UZEL

2) $V_1(K_{m,n}) \cap V_2(K_{m,n}) = \emptyset$

KAŽDÁ HRANA, KTERÁ TAM JE: PRO KAŽDOU HRANU e Z TOHO $E(K_{m,n})$ EXISTUJÍ UZLY u Z TOHO $V_1(K_{m,n})$ A EXISTUJE UZEL v Z TOHO $V_2(K_{m,n})$ TAKOVÉ ŽE TA HRANA JE JIMI TVOŘENA $e = \{u,v\}$

3) $(\forall e \in E(K_{m,n}))(\exists u \in V_1(K_{m,n}))$
$(\exists v \in V_2(K_{m,n}))\ e = \{u,v\}$

POPSAT ÚPLNOST, ŽE NELZE PŘIDAT DALŠÍ HRANU
VELIKOST $|V(K_{m,n})|$ SE ROVNÁ VELIKOST $|V_1(K_{m,n})| + |V_2(K_{m,n})|$,
POKUD VELIKOST $|V_1(K_{m,n})|$ BUDE m A VELIKOST $|V_2(K_{m,n})|$ BUDE n, TAK JE TO $m+n$

4) $|V(K_{m,n})| = |V_1(K_{m,n})| + |V_2(K_{m,n})| = m+n$

JAK JE TO S POČTEM HRAN? KAŽDÝ UZEL BUDE MÍT n HRAN

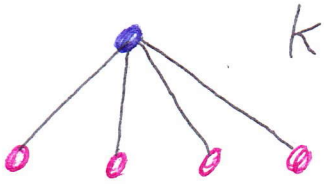
5) $|E(K_{m,n})| = \underbrace{n+n+\ldots+n}_{m} = m \cdot n$

UZLŮ V_1 JE m.
POČET HRAN JE $m \cdot n$.

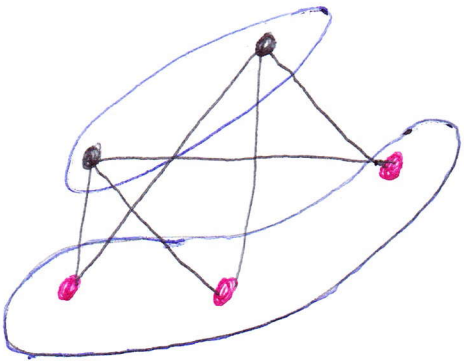
TÍM JE VYMEZEN ÚPLNÝ BIPARTITNÍ GRAF

POKUD JSOU ČÍSLA RŮZNÁ, TAK PRVNÍ PÍŠEME TO MENŠÍ

PŘESTOŽE $K_{4,1}$ JE TO SAMÉ JAKO $K_{1,4}$, TAK JE TO TENTÝŽ GRAF, TAK Z ESTETICKÉHO DŮVODU DÁVÁME PŘEDNOST $K_{1,4}$



$K_{1,4}$

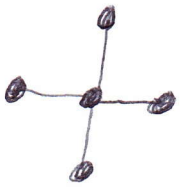


$K_{2,3}$

HVĚZDA

S_n ← počet paprsků hvězdy

S_4



(S_4 JE TÉŽ BIPARTITNÍ GRAF)

$|V(S_n)| = n+1$

$|E(S_n)| = n$

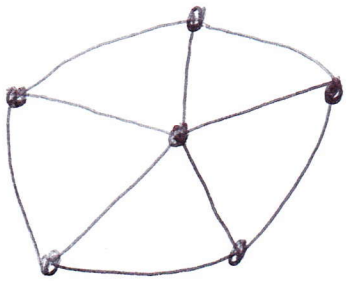
i) NEOBSAHUJE KRUŽNICI

ii) PRÁVĚ JEDEN UZEL INCIDUJE S n HRANAMI

iii) PRÁVĚ n UZLŮ INCIDUJE S JEDNOU HRANOU

KOLO W_n

W_5



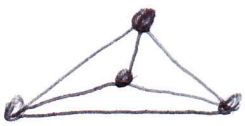
$|V(W_n)| = n+1$

$|E(W_n)| = E(C_n) + |E(S_n)| =$

$= n + n = 2n$

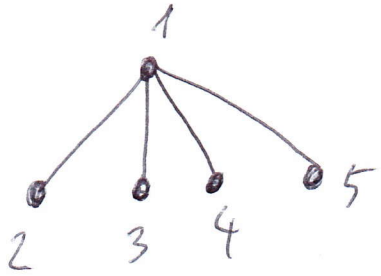
KOLO = HVĚZDA + KRUŽNICE

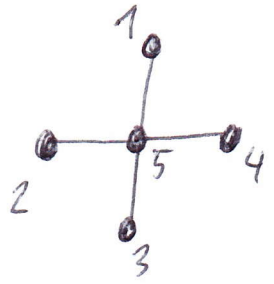
ÚPLNÝ GRAF	K_n	$n \geq 1$	POČET UZLŮ
KRUŽNICE	C_n	$n \geq 3$	POČET UZLŮ
CESTA	P_n	$n \geq 0$	POČET HRAN
DISKRÉTNÍ	D_n	$n \geq 1$	POČET UZLŮ
ÚPLNÝ BIPARTITNÍ GRAF	$K_{m,n}$	$m \geq 1, n \geq 1$	POČET UZLŮ
HVĚZDA	S_n	$n \geq 0$	POČET HRAN
KOLO	W_n	$n \geq 3$	



W_3

IZOMORFISMUS V GRAFU





(DIAGRAMY GRAFU - ZPŮSOB ZÁZNAMU)

IZOMORFNÍ JSOU GRAFY

MP-problém - ROZPOZNÁVÁNÍ IZOMORFISMUSU se nedá řešit v reálném čase

MĚJME DVA GRAFY G A H.

GRAFY G A H NAZVEME IZOMORFNÍ, JESTLIŽE EXISTUJE VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉ ZOBRAZENÍ f TAKOVÉ ŽE f JE ZOBRAZENÍ $f\ V(G) \xrightarrow{NA} V(H)$, $\forall \{x,y\} \in E(G)$ EXISTUJE HRANA $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$

ZOBRAZENÍ f NAZÝVÁME IZOMORFISMUS GRAFU G A H.

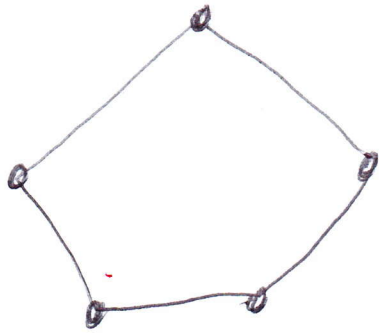
$$G \cong H$$

IZOMORFNÍ

1. BÝT IZOMORFNÍ - JE RELACE NA GRAFECH
2. IZOMORFISMUS V GRAFU - NÁZEV TOHO ZOBRAZENÍ

HLEDÁNÍ UZLŮ $\Rightarrow$ VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉ ZOBRAZENÍ (NENÍ IZOMORFISMUS)

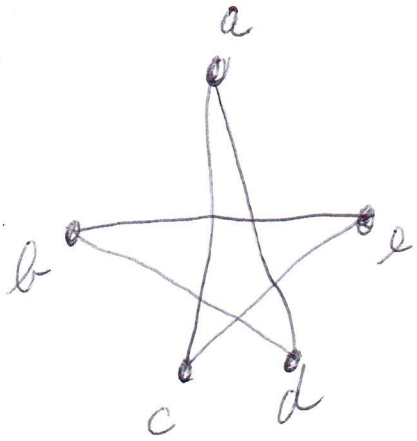
G:



$f(a)$ MOHU ZOBRAZIT K 5TI MOŽNOSTÍM

$f(a) = a$
b
c
d
e

H:



K $f(b)$ PAK MOHU PŘIŘADIT ČTYŘI

$f(b) = \dots$

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$5!$

počet zobrazení je $n!$, kde n je počet uzlů. $|V(G)|$

EXISTUJE 120 ZOBRAZENÍ, ALE NE KAŽDÉ ZOBRAZENÍ JE IZOMORFISMUS.

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA - POSTAČUJE ABY VLASTNOST PLATILA, GARANTUJÍ VLASTNOST

NUTNÁ PODMÍNKA - VYVOLANÁ VLASTNOSTÍ

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA K IZOMORFISMU:
NEEXISTUJE

NUTNÝCH PODMÍNEK JE HODNĚ

Nechť G a H JSOU GRAFY.
$G=(V,E)$ a $H=(V,E)$
JESTLIŽE DVA GRAFY JSOU IZOMORFNÍ
$|V(G)|=|V(H)|$, TAK MAJÍ STEJNÝ POČET UZLŮ.

GRAFY JSOU NEIZOMORFNÍ, PRÁVĚ KDYŽ NEJSOU IZOMORFNÍ.

DOPLNĚK

DISKRÉTNÍ GRAF JE Z HLEDISKA HRAN JE JAKÝMSI PROTIPÓLEM ÚPLNÉHO GRAFU.

DOPLŇKEM DISKRÉTNÍHO GRAFU JE ÚPLNÝ GRAF, A DOPLŇKEM ÚPLNÉHO GRAFU JE DISKRÉTNÍ GRAF.

DOPLNĚK: TO CO MUSÍM PŘIDAT KE GRAFU, ABYCH ZÍSKAL ÚPLNÝ GRAF, NAD STEJNOU MNOŽINOU UZLŮ