

Teorie grafů je matematická disciplína. Spadá do oblasti diskrétní matematiky – je to specifická matematická disciplína, diskrétní znamená nespojitá – odvíjí se od toho, že procesy v počítačích popisujeme nějakými slovy nad nějakou konkrétní abecedou (nul a jedniček) a jsou to tedy nespojitě hodnoty. Další oblastí diskrétní matematiky je kódování a šifrování, což jsou také samostatné matematické disciplíny. Tato věda je stará cca 300 let a stále se vyvíjí, využívá výpočetní techniky. Má blízko k realitě. Je součástí moderní informatiky.

Teorie grafů nejsou grafy funkcí. Není naukou o sestrojování statistických grafů.

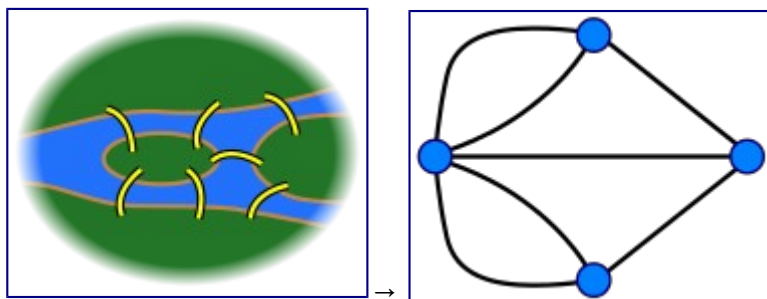
Teorie grafů se zabývá vztahy mezi objekty (uzly).

Leonhard Euler – matematické objevy

První úloha Teorie grafů, kdy byla kdy řešena:

7 mostů města Královce:

Podaří se projít všechny mosty 1x a skončit na začátku?



nelze projít pomocí tzv. eulerovského tahu – tedy, nelze nakreslit jedním tahem

Eulerův tah - lze nakreslit jedním tahem (lze projít každou hranou jednou, abych vytvořil všechny hrany jedním tahem)

Smysl: Řada věcí lze nahradit schématem, který to popisuje.

Kirchhoffovy zákony o toku proudu. Kirchhoff i jiní využili Teorii grafů.

Velká Fermatova věta

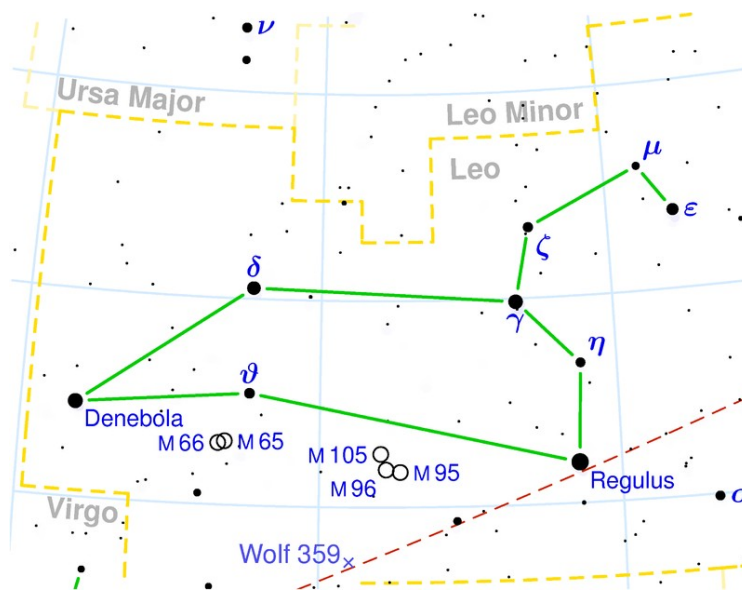
Problém 6 barev – pokud si vezmu libovolnou mapu libovolného území a stanovím podmínku: státy které se dotýkají nenulovou hranicí, to znamená více než jenom přes roh, nemůžou mít stejnou barvu. Otázkou je, kolik barev potřebuji k vybarvení takové mapy? Pro každou konkrétní mapu se to dá udělat konkrétně ten počet barev najít.

Pokud je to zadáno obecně, lze libovolnou mapu obarvit čtyřmi barvami? Ano. Podařilo se to dokázat pomocí počítače. **Každou mapu kterou dokážeme nakreslit do roviny dokážeme obarvit nejvýše čtyřmi barvami. (je i: nejméně 4mi barvami)**

Hemiltovská kružnice – složitost roste exponenciálně, používají se algoritmy na hrubé síle aby ji našli, hrubá síla s přibývajícimi uzly – rychle narůstá časová náročnost.

Grafy najdeme v podstatě všude.

Souhvězdí Lva



Mapy – barvením map se řeší navrhování obvodů.

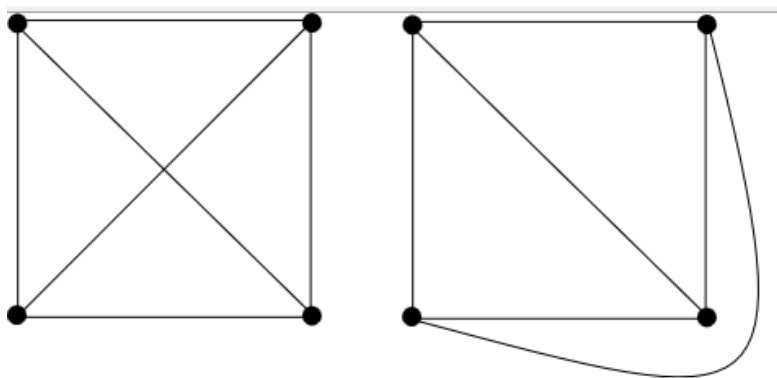
Silniční mapa – spoje silnice (hodně hran), spoje existují

Železniční mapa – ještě nějaké spoje existují

Letecká mapa – takový graf bychom nazvali diskrétním grafem, protože tam neexistuje z našeho pohledu ani jedna hrana. Graf úplný – lze přistát libovolně mezi dvěma letišti.

Navrhování obvodů – je základní vlastností Teorií grafů, navrhují se tak, aby nedocházelo ke křížení spojů.

Rovinný graf (též **planární graf**) je graf, pro který existuje takové rovinné nakreslení, že se **žádné dvě hrany nekříží**.



K_4 , úplný graf na 4 vrcholech, lze zakreslit do roviny bez křížení hran. Pro K_5 to možné není.

Vývojový diagram: algoritmus, co dělat když nesvítí světlo – vývojový diagram je pro nás graf.

Šachový problém – jedná se o jezdce na šachovnici, jezdec může projít všechny pole šachovnice, má to víc než jedno řešení, stejná – ale začínají z jiného pole – **izomorfní**.

Je možné začít z libovolného pole šachovnice? Ano, je to jedno odkud začneme. (Kdyby ne, muselo by existovat pole přeskočené.). Budeme tomu říkat kružnice o 64 vrcholech.

Kružnice v Teorii grafů vypadá může být i kostkatá.

Co to je graf?

Graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je neprázdná množina a E je množina dvoubodových podmnožin množiny V . Prvky množiny V se nazývají **vrcholy grafu** (uzly) a prvky množiny E se nazývají **hrany**.

Počet prvků množiny V je vždy alespoň 1, prázdné grafy nepřipouštíme. Na množinu E žádná podmínka kladená není a může být prázdná.

Jak by mohli vypadat nějaké grafy?

$G = (V, E)$

Tímto čtu, že **G je graf**. Teď se stačí odvolávat, necht' G má toto a toto, vždy to bude znamenat, že je to graf.

Když budu mluvit o konkrétní množině vrcholů toho daného grafu, tak budeme psát způsobem:
 $V(G)$ - množina vrcholů grafu G .

Pokud budu mít dva grafy: graf G a graf H

$G = (V, E)$ $V(G)$ $E(G)$ G je graf, množina vrcholů grafu G ; množina hran grafu G

$H = (V, E)$ $V(H)$ $E(H)$ H je graf; množina vrcholů grafu H ; množina hran grafu H

Vertex vrchol

Edge hrana

Definice požadovala, že množina V je neprázdná.

Budeme mít nějaký graf G a množina uzlů musí být neprázdná, tak může mít třeba uzly: a, b, c, d .

$V(G) = \{a, b, c, d\}$

Jak vypadá množina hran? Například jedna množina hran, je množinou dvoubodových podmnožin množiny V . Třeba podmnožina $\{a, b\}$. Je dvoubodová? Je. Co třeba $\{a, a\}$ je dvoubodová? Ne, obsahuje ve skutečnosti jeden prvek a to prvek a . Toto pro nás zatím nebude hrana. Stejně tak, pokud se v zápise objeví $2x$ hrana, to že tam napíšu vícekrát jednu hranu, neudělá nic, ale ve skutečnosti je tam dvojice pouze $1x$.

$E(G) = \{\{a, b\}, \{a, a\}, \{a, b\}\} = \{\{a, b\}\}$

Můžeme mít tedy množinu $E(G)$, která bude obsahovat 1 prvek a ten prvek nazveme hranou.

Můžeme mít i jinou množinu hran nad tou stejnou množinou uzlů. Například nebude obsahovat žádnou hranu.

$E(G) = \emptyset$

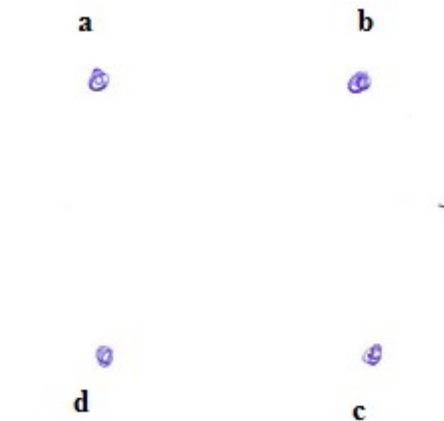
Můžeme mít i takovou množinu která obsahuje hrany:

$E(G) = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{d, c\}, \{a, e\}\}$ To jsou všechno množiny hran.

Odkud se bere slovo Graf? grafos: kresba, obrázek

A proč ta Teorie grafů je tak oblíbená? Vztahy, objekty v teorii grafů se snadno vizualizují.

Pokud vezmu předchozí množinu $V(G)$, pokud budeme hovořit o vrcholech, tak můžeme znázorňovat vybranými objekty načrtnutými na rovinu, například: puntíky nebo kolečkami. Nejde o to jak je to znázorněné, jde o ty vztahy.



A můžeme si znázornit například Graf, který by měl množinu uzlů $V(G)$ a množinu hran $E_1(G)$.

Graf G_1

je takový, že $V(G_1)$ je $V(G)$
ale $E(G_1)$ je tato:

$$G_1 = (V, E)$$

$$V(G_1) = V(G)$$

$$E(G_1) = E_1(G)$$

ta množina bude stále stejná,

To je graf, který má čtyři uzly a žádnou hranu, už ho máme zakreslený výše. **Toto není graf!!** To je takzvaný **DIAGRAM GRAFU**. A není to nic jiného než jeho **vizualizace, podle předem domluvených pravidel.**

$\{a, b, c, d\}$ je náš první graf G_1 , který má 4 uzly a žádnou hranu.

Podíváme se na druhý graf:

Jak vypadá jeho množina uzlů?

Jak vypadá jeho množina hran?

$$G_2 = (V, E)$$

$$V(G_2) = V(G)$$

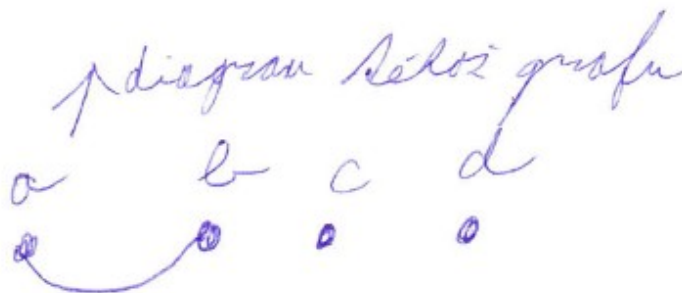
$$E(G_2) = E_2(G)$$

Vyznačím 1 hranu.



Mohlo by to vypadat i takto:

Snaha namalovat co nejpřehledněji.



Bývá zvykem hrany zakreslovat úsečkami, ale tak, aby nedocházelo ke křížení úseček.
 I když změní pořadí uzlů, tak je to také DIAGRAM téhož grafu. Není jednoznačně řečeno jak diagram kreslit, každý z nás může ho nakreslit jinak.

Grafické znázornění je vždy DIAGRAM a graf jako takový je zapsán symboly. **Znázornění grafu je vždy diagram, ale není to graf, je to jenom diagram grafu.**

Podstatné je, jak je ten graf zapsán.

Jednoduší je zapisovat grafy pomocí diagramů, rychlejší, lépe se z toho něco pozná.

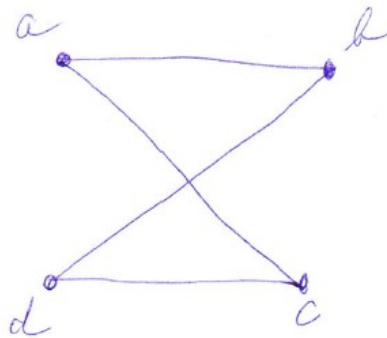
Co budu muset umět:

K danému grafu přiřadit diagram grafu.

K danému diagramu grafu sestrojít graf.

Zase G_3 je graf:

$$\begin{aligned} G_3 &= (V, E) \\ V(G_3) &= V(G) \\ E(G_3) &= E_3(G) \end{aligned}$$



Vidíme, že tento graf už má 4 hrany, tak se je pokusíme znázornit:

$$E_3(G) = \{ \overset{e_1}{\{a, b\}}, \overset{e_2}{\{b, d\}}, \overset{e_3}{\{d, c\}}, \overset{e_4}{\{a, c\}} \}$$

Prošli jsme všechny vrcholy a určili jsme stupeň vrcholu ze kterého jsme vyšli. Každý ten vrchol se **objevuje (inciduje)** mezi dvojicemi právě dvakrát. Je to 2krát a, 2x b, 2x d, 2x c.

Incidence – pokud uzel a se objeví v nějaké hraně {a, b}, tak hovoříme o tom, že s touto hranou inciduje.

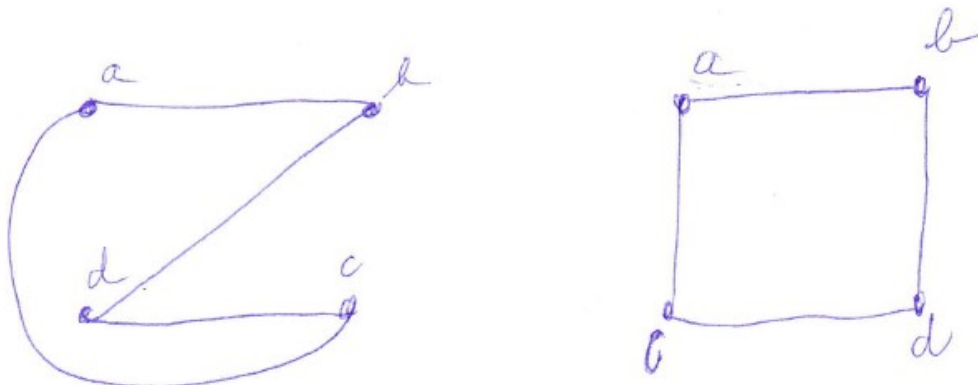
Uzel a inciduje s hranou e_1 právě tehdy, pokud se a objeví v té hraně {a, b}. Hrany si označím vlastními symboly (e_1, e_2, e_3, e_4)

Uzel a inciduje s hranou e_1 právě tehdy, když existuje nějaký uzel b takový, že hrana {a, b} ∈ E(G) je v tom grafu.

U DIAGRAMU GRAFU říkáme uzel a inciduje s hranou {a, b}, uzel a inciduje s hranou {a, c}, ale lze za tu definici vyslovit i trojhrany, a můžeme říkat že hrana inciduje s uzlem.

Tedy uzel inciduje s hranou, hrana inciduje s uzlem.

Hrany se nám u graf překřížili. Pokud chceme zakreslit bez křížení hran, můžeme udělat tyto varianty:

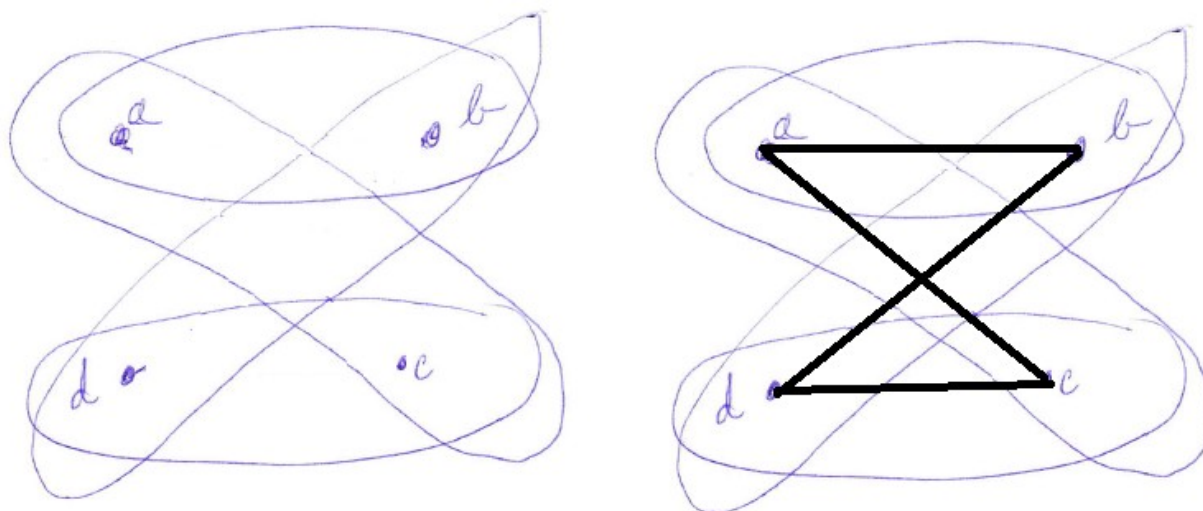


To co jsme namalovali jsou diagramy jednoho jediného grafu $G_3 = (V, E)$. Vidíme, že ty diagramy vypadají různě.

Neexistuje algoritmus, který by dokázal že dva grafy jsou **izomorfní**. Izomorfní – jsou ve své podstatě stejné, jenom jsou jinak zakreslené, neexistuje žádný efektivní algoritmus pro toto nalezení. Budeme si ukazovat jak poznat že izomorfní nejsou.

Kdybychom graf $G_3 = (V, E)$ znázorňovali množinami

Jak vypadá množina obsahující prvky a, b ? – kreslí se jako brambora. Zde je několik množin:



I když je to správně, tak to není přehledné (množiny). Lepší je to nahradit vedlejším obrázkem.

Pojmy zmínily:

Graf

Uspořádaná dvojice

Diagram grafu

Uzel – prvek množiny V (můžou být například židle, lidé, ...)

Hrana – prvek množiny E (množina hran může být nadefinovaná: židle se nachází ve stejné místnosti, množina hran může vypadat: že jsem na židli seděl)

Incidovat – Uzel inciduje s hranou, hrana inciduje s uzlem a je to záměnné.

Co se stane když se tam objeví množina $\{a, a\}$ nebo se tam vícekrát objeví množina $\{a, b\}$, graf který toto nepovoluje, to znamená že povoluje pouze přesně dvouprvkové podmnožiny v nejvýše jednom výskytu se nazývá:

JEDNODUCHÝ NEORIENTOVANÝ GRAF.

VÝZNAČNÉ TYPY GRAFŮ:

1) ÚPLNÝ GRAF značíme ho písmenem K (od slova complete, c bude vyhrazen pro jiný typ grafu)

Jestliže budeme hovořit o nějakém počtu, tak přetížíme operátor absolutní hodnoty, bude to vždy znamenat počet množství.

$K_n = (V, E)$ Pokud budu znát počet prvků, tak to budu psát jako dolní index u grafů.
Tedy to znamená: úplný graf na n uzlech.

Pokud napíši počet prvků $|V(K_n)| = n$, tak tím říkám počet prvků nějaké množiny.

$|E(K_n)| = ?$ Na cvičení odvodit a dokázat kolik takový graf má hran.

Co to je Úplný graf?

Je to nasycený graf do kterého už nelze přidat žádnou hranu. Je to tedy graf s maximálním možným počtem hran.

Když budu mít graf K_1 – to je graf na jednom uzlu, nemůžu přidat hranu, protože hrany jsou dvoubodové podmnožiny a $\{a, a\}$ jsme zakázali. Tohle je úplný graf na jednom uzlu:



Jak bude vypadat K_2 ? Můžu tam přidat ještě nějakou hranu? Ano. Můžu přidat ještě nějakou hranu? Ne, protože zdvojené hrany jsme zakázali. Graf K_2 je tento:



Graf K_3 můžu přidat hranu? Můžu. Znovu pak můžu. Znovu pak můžu. Pak už nelze přidat hranu. Graf K_3 je tento:



Asi tušíme jak sestrojít Diagram grafu K_4 K_5 atd.

Hlavní ideou je že graf K_n má n uzlů a už nelze přidat žádnou hranu, je plně nasycen.

Graf: Kružnice

Kružnice se bude značit symbolem C a zase s dolním indexem n . Kružnice má n uzlů.

$C_n = (V, E)$ C_n je graf,

a počet uzlů je n : $|V(C_n)|$

a počet hran odvodíme na cvičení: $|E(C_n)| = ?$

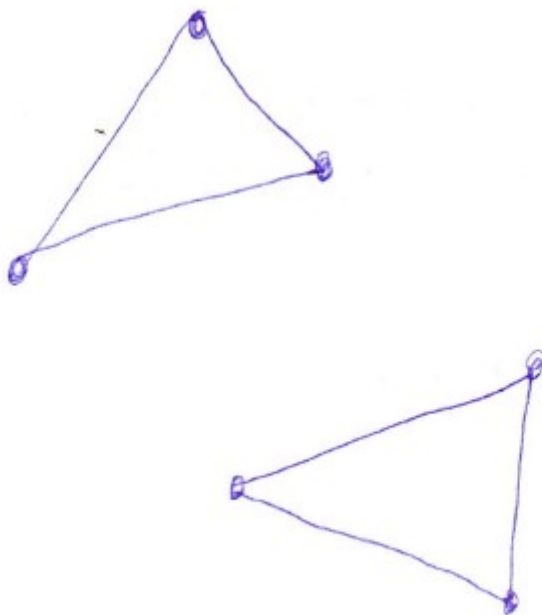
Jak nadefinovat kružnici? Kružnice nemusí být kružnice v geometrickém slova smyslu.

Kružnice je graf kde **každý uzel inciduje se dvěma hranami** to je první podmínka, a druhá podmínka: **z každého uzlu se lze dostat po těch hranách do libovolného jiného uzlu.**

Tedy jde o souvislý graf stupně 2 (nyní nevím co je to souvislost a stupeň uzlů).

Zkusíme na 6ti uzlech $C_6 = (V, E)$:

Tak například tady u tohoto grafu je splněná ta podmínka, že každý uzel inciduje se dvěma hranami, ale není splněna podmínka, že se s každého uzlu lze dostat do jiného. Například odtud se nedostanu sem – tady žádná hrana není.



Když se podívám na K_3 tak tuhle podmínku splňuje. Takže graf K_3 je zároveň grafem C_3 , takže máme kružnice.

$$K_3 = C_3$$

Milan Mroczkowski
sata150@gmail.com
yesit.cz

Zdroje:

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/96/K%C3%B6nigsberg_graph.svg/180px-K%C3%B6nigsberg_graph.svg.png

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/91/7_bridges.svg/179px-7_bridges.svg.png

http://cs.wikipedia.org/wiki/Souhv%C4%Bzd%C3%AD_Lva#mediaviewer/File:Leo_constellation_map.png

http://cs.wikipedia.org/wiki/Rovinn%C3%BD_graf

