YESIT.CZ
MILAN MROCZKOWSKI

NEROVNICE

- zabýváme se DEFINIČNÍM OBOREM, tedy definiční obor vypočítáme pomocí nerovnice.

$$5x - 2 \leq 4(x-1) - 2$$

$$5x - 2 \leq 4x - 4 - 2$$

$$5x - 2 \leq 4x - 6 \qquad / -4x$$

$$x - 2 \leq -6 \qquad / +2$$

$$x \leq -4$$

$$K \in (-\infty, -4\rangle$$

Poznámka:

Výsledkem nerovnice je interval, výsledkem rovnice je číslo.

$$2x + 7 < 3x - 4$$

$$2x + 7 < 3x - 4 \qquad / -3x$$

$$-x + 7 < -4 \qquad / -7$$

$$-x < -11 \qquad / \cdot(-1)$$

$$x > 11$$

$$K \in (11, \infty)$$

obracím znaménko díky −, K = množina kořenů

Poznámka:

Definiční obor je množina.

$$3x^2 - 7x + 4 \le 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49 - 48 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

ZJISTÍM NULOVÉ BODY:

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 1) \le 0$$

Poznámka: pro zjištění nulových bodů píši vždy $x -$. Získám 2 hodnoty x - nulových bodů.

Co musím dosadit do závorek aby byly nulové?

$$x = \frac{4}{3}, 1$$

Poznámka: $\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0\right)$ $(1 - 1 = 0)$

VYTVOŘÍM TABULKU

	$(-\infty, 1)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$
$x - \frac{4}{3}$	−	−	+
$x - 1$	−	+	+
	− krát − je +	− krát + je −	+ krát + je +

Poznámka: Vezmu "krajíc chleba" a 2x ho rozříznu, získám 3 body $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ vždy o 1 víc než nulových bodů.

My chceme podle zadání ≤ 0, tedy chceme menší proto vyberu −, protože chceme také rovno, tak ve výsledku budou hranaté závorky, zde z obou stran.

$$x \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$$

Poznámka: Pokud dosazuji hodnoty z $(-\infty, 1)$ za $x - \frac{4}{3}$, tak dostávám záporné hodnoty a do chlívku napíši −.

$$5x^2-8x-4>0$$

$$D=64-4\cdot5\cdot(-4)=64-(-80)=144$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{144}}{2\cdot5}=\frac{8\pm12}{10}$$

$$x_1=2$$

$$x_2=-\frac{4}{10}=-\frac{2}{5}$$

ZJISTÍM NULOVÉ BODY

$$(x-2)\left(x-\left(-\frac{2}{5}\right)\right)>0$$

Poznámka:
$\left(x-\left(-\frac{2}{5}\right)\right)\Rightarrow x+\frac{2}{5}$

$$x=2,\ -\frac{2}{5}$$

VYTVOŘÍM TABULKU

	$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)$	$\left(-\frac{2}{5},2\right)$	$(2,\infty)$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$x+\frac{2}{5}$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Zajímá nás se sadami větší než nula. Vyšli dva intervaly.

$$\underline{\underline{K\in\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup(2,\infty)}}$$

Výsledkem je sjednocení intervalu.
Například: 3, 6, −20 splňují tuto kvadratickou nerovnost.

$$\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3} < 1 \quad /-1$$

Poznámka:
① chci tvar, kde na jedné straně bude nula
② Musíme se zbavit cokoliv na druhou, na pátou, ...

$$\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3} - 1 < 0$$

$$\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3} - \frac{2x^2-5x+3}{2x^2-5x+3} < 0$$

$$\frac{4x^2-5x-1-(2x^2-5x+3)}{2x^2-5x+3} < 0$$

$$\frac{4x^2-5x-1-2x^2+5x-3}{2x^2-5x+3} < 0$$

$$\frac{2x^2-4}{2x^2-5x+3} < 0$$

→ výpočet kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad \text{KOŘENY}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right) \qquad (x-1)$$

$$n = \frac{3}{2}, 1$$

$$\frac{2x^2-4}{(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)} < 0$$

Jak mám jmenovatele, tak do stejného tvaru potřebuji čitatel.

$A^2 - B^2 = (a-b)(a+b)$

$$\frac{2(x^2-2)}{(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)} < 0$$

$$\frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)} < 0 \rightarrow n = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

Tedy máme nulové body:

$x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, \frac{3}{2}$

VYTVOŘÍM TABULKU

Vždy budu mít o jeden interval víc než nulových bodů. Seřadím čísla od nejmenší po největší.

	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}; 1)$	$(1, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
$x-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+\sqrt{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Ze zadání nás zajímá <0, proto vyberu $-$.

$$K \in (-\sqrt{2}; 1) \cup (\sqrt{2}, \frac{3}{2})$$

Poznámka: pro sloupec $(1, \sqrt{2})$: mínus krát plus = mínus

mínus krát plus = $-$

Tedy: lichý počet mínusů je $-$,

sudý počet mínusů je $+$

$-$ krát $-$ je $+$

$\cup$ sjednocení

PODMÍNKY PRO DEFINIČNÍ OBOR

$\frac{1}{x}$ $\quad D_f \neq 0$ NELZE DĚLIT NULOU

$\log\frac{1}{x}$ $\quad D_f: x > 0$ $x > 0$ PROTOŽE MUSÍM STANOVIT DVĚ PODMÍNKY:
- PRO LOGARITMUS
- PRO JMENOVATELE

$\ln x$, $\log x$ $\quad D_f: x > 0$

$\sqrt{x}$ $\quad D_f: x \geq 0$ POD ODMOCNINOU NESMÍ BÝT ZÁPORNÉ ČÍSLO

PŘÍKLAD: $x^2 - 4 > 0$, ŘEŠÍM PODMÍNKY:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm 4}{2} \quad x_1 = \frac{4}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

NEBO:

$$A^2 - B^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(x-2)(x+2)$$

$$x_1 - 2 = 0 \qquad x_2 + 2 = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

NULOVÉ BODY

$$(x_n - 2)\,(x_n - (-2))$$

$$x_n - 2 = 0 \qquad x_n + 2 = 0$$

$$x_n = 2 \qquad x_n = -2$$

Tabulka:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

pojímá nás >0

$$K \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$$

$$f: y = \sqrt{\frac{x+4}{2x-2}}$$

PODMÍNKY PRO DEFINIČNÍ OBOR:

1) $2x-2 \neq 0$ NESMÍ SE DĚLIT NULOU

2) $\frac{x+4}{2x-2} \geq 0$ POD ODMOCNINOU NESMÍ BÝT ZÁPORNÉ ČÍSLO

ŘEŠÍM PODMÍNKY:

1) $2x-2 \neq 0 \quad /+2$

$2x \neq 2 \quad /:2$

$x \neq 1$

! VE VÝSLEDKU NEBUDE ZAHRNUTA 1.

2) $x+4 \geq 0$

$x \geq -4$

$2x-2 \geq 0$

$2x \geq 2 \quad /:2$

$x \geq 1$

! ROVNO SE PROJEVÍ VE VÝSLEDKU

NULOVÉ BODY: $\boxed{x-}$ POUŽÍVÁM PRO ZJIŠTĚNÍ NULOVÝCH BODŮ, DOSAZENÉ ČÍSLO MUSÍ DÁT NULU.

$(x_n-(-4))$ $\quad$ (x_n-1)

$x_n+4=0$ $\quad$ $x_n-1=0$

$x_n=-4$ $\quad$ $x_n=1$

x_n = NULOVÝ BOD

	$(-\infty,-4)$	$(-4,1)$	$(1,\infty)$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
MÍNUS KRÁT MÍNUS JE +		$-$	$+$

ZAJÍMAJÍ MĚ + (PLUSY), PROTOŽE PŘI ŘEŠENÍ PODMÍNEK VYŠLO, ŽE X JE VĚTŠÍ

$$K \in (-\infty,-4\rangle \cup (1,+\infty)$$

$$g: y = \log \frac{-x}{2x^2-2x-60}$$

Podmínky pro definiční obor:

① $2x^2-2x-60 > 0$ (nulou nelze dělit)

② $\frac{-x}{2x^2-2x-60} > 0$ (logaritmus musí být větší než nula)

Řeším podmínky:

① $2x^2-2x-60 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4\cdot 2\cdot(-60)}}{2\cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-(-480)}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{484}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 22}{4} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

②
$$\frac{-x}{2x^2-2x-60} > 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{x}{2x^2-2x-60} < 0$$

$$\frac{x}{2x^2-2x-60} < 0 \qquad \Rightarrow \quad x < 0$$

$$\frac{x}{2(x^2-x-30)} < 0 \qquad \Rightarrow x^2 - x - 30$$

Toto vytknutí šlo by udělat i u podmínky ①

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 11}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

$$\frac{x}{2(x+6)(x-5} < 0$$

Nulové body:

$$(x-6) \quad (x-(-5)) \quad (x-0)$$

$$(x-(-5)) = (x+5)$$

$$n = 6, -5, 0$$

Tabulka:

	$(-\infty,-5)$	$(-5,0)$	$(0,6)$	$(6,+\infty)$
$(x-6)$	−	−	−	+
$(x+5)$	−	+	+	+
$(x-0)$	−	−	+	+
	−	+	−	+

Zajímají mě minusy, protože při řešení podmínek vyšlo, že x je menší.

$$K \in (-\infty, -5) \cup (0, 6)$$

$$k: y = \sqrt{x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{33}{2}} + \log\left(-\left(x^2 - \frac{81}{4}\right)\right)$$

První se zabývám $y = \sqrt{x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{33}{2}}$ a potom $\log\left(-\left(x^2 - \frac{81}{4}\right)\right)$.

Podmínky pro definiční obor:

$$x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{33}{2} \geq 0$$

(pod odmocninou nesmí být záporné číslo)

Řeším podmínky:

$$x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{33}{2} \geq 0 \quad / \cdot 2$$

$$2x^2 - 17x + 33 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 33}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm 5}{4} \quad x_1 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} \quad x_2 = \frac{12}{4} = 3$$

Nulové body:

$$\left(x - \frac{11}{2}\right) \quad (x - 3)$$

$$n = \frac{11}{2}, 3$$

Tabulka:

	$(-\infty, 3)$	$(3, \frac{11}{2})$	$(\frac{11}{2}, +\infty)$
$(x-\frac{11}{2})$	$-$	$-$	$+$
$(x-3)$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$$(-\infty, 3\rangle \cup \langle \frac{11}{2}, +\infty)$$

Podmínky pro definiční obor:

$$(-(x^2 - \frac{81}{4})) > 0$$

(logaritmus musí být větší než nula)

Řeším podmínky:

$$(-(x^2 - \frac{81}{4})) > 0$$

$$-x^2 + \frac{81}{4} > 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x^2 - \frac{81}{4} < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\frac{81}{4})}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{81}}{2} \quad x_1 = \frac{9}{2}, \quad x_2 = -\frac{9}{2}$$

Nulové body:

$$(x - \frac{9}{2})\,(x - (-\frac{9}{2}))$$

$$\Downarrow$$

$$(x + \frac{9}{2})$$

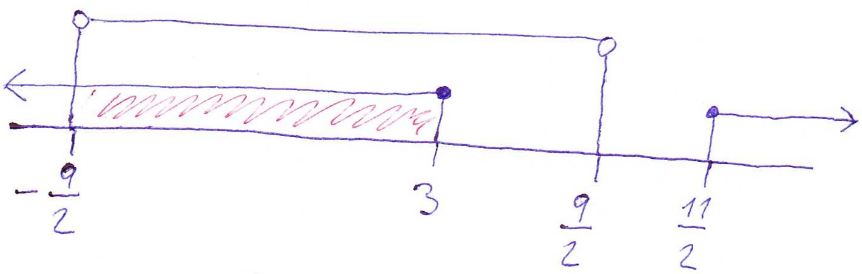
$$n = \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}$$

TABULKA:

	$\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$	$\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$	$\left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$
$\left(x+\frac{9}{2}\right)$	$-$	$+$	$+$
$\left(x-\frac{9}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$$\underline{\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)}$$

Spojení podle dvou polo-výsledků:



$$\underline{\underline{k \in \left(-\frac{9}{2}, 3\right\rangle}}$$

STANOVTE DEFINIČNÍ OBOR FUNKCÍ:

a) $f: y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$

b) $f: y = \log \dfrac{3x-6}{5}$

c) $f: y = \sqrt{\dfrac{-2}{x^2-5x+6}}$

d) $f: y = \log(x^2-10) + \sqrt{x^2-5x}$

e) $f: y = \log\left(\sqrt{x^2-4}\right)$

a) $f: y = \frac{1}{\sqrt{5-2x}}$

Podmínky pro definiční obor:

$5 - 2x \geq 0$ — pod odmocninou nesmí být záporné číslo

$5 - 2x > 0$ — nulou nelze dělit, ve jmenovateli nesmí být nula

Řeším podmínky:

$5 - 2x \geq 0 \quad / -5$

$-2x \geq -5 \quad / \cdot(-1)$

$2x \leq 5$

$x \leq \frac{5}{2}$

$5 - 2x > 0 \quad / -5$

$-2x > -5 \quad / \cdot(-1)$

$2x < 5 \quad / :2$

$x < \frac{5}{2}$

Nulové body

$\left(x - \frac{5}{2}\right)$

$x = \frac{5}{2}$

Tabulka:

	$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
$\left(x - \frac{5}{2}\right)$	$-$	$+$
	$-$	$+$

Výsledek lineární nerovnice:

$K \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$

b) $f: y = \log \frac{3x-6}{5}$

Podmínky pro definiční obor:

$$\frac{3x-6}{5} > 0$$

Řeším podmínky:

$$3x - 6 > 0 \quad /+6$$
$$3x > 6 \quad /:3$$
$$x > 2$$

Nulové body

$(x-2)$

$x = 2$

Tabulka:

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$(x-2)$	$-$	$+$
	$-$	$+$

$$\underline{\underline{K \in (2, +\infty)}}$$

c)

$$f: y = \sqrt{\frac{-2}{x^2-5x+6}}$$

Podmínky pro definiční obor:

① $x^2 - 5x + 6 > 0$ nulou nelze dělit

② $\frac{-2}{x^2-5x+6} \geq 0$ pro odmocninu

Řešíme podmínky:

① $x^2 - 5x + 6 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

② $\frac{-2}{x^2-5x+6} \geq 0 \quad /\cdot(-1)$

$$\frac{2}{x^2-5x+6} \leq 0$$

$\rightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

Nulové body:

$(x-3)$ $(x-2)$

$x = 3, 2$

Tabulka:

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$$K \in (2, 3)$$

Zajímají mě minusy, protože při řešení podmínek vyšlo, že x je menší.

d) $f: y = \log(x^2-10) + \sqrt{x^2-5x}$

Začnu první řešit $\log(x^2-10)$ a pak $\sqrt{x^2-5x}$

Podmínky pro definiční obor:

$$x^2 - 10 > 0$$

Řeším podmínky:

$$x^2 - 10 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2-4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{4\cdot 10}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm 2\sqrt{10}}{2} \quad x_1 = \sqrt{10}, \quad x_2 = -\sqrt{10}$$

Nulové body:

$(x - \sqrt{10})$ $(x - (-\sqrt{10}))$

$\Downarrow$

$(x + \sqrt{10})$

$n = \sqrt{10}, -\sqrt{10}$

TABULKA:

	$(-\infty, -\sqrt{10})$	$(-\sqrt{10}, \sqrt{10})$	$(\sqrt{10}, +\infty)$
$(x-\sqrt{10})$	$-$	$-$	$+$
$(x+\sqrt{10})$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$$(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$$

Podmínky pro definiční obor:

$$x^2 - 5x \geq 0$$

Řeším podmínky:

$$x(x-5) \geq 0$$

$x \geq 0$

$x - 5 \geq 0 \quad /+5$

$x \geq 5$

Pokud je tvar ax^2+bx tak vytýkám.

Nulové body:

$(x-0) \quad (x-5)$

$\Downarrow$

(x)

$n = 0, 5$

Tabulka:

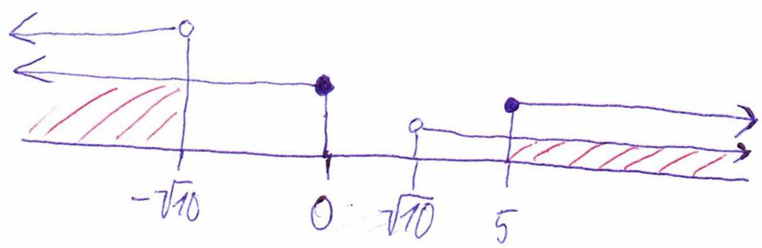
	$(-\infty, 0)$	$(0, 5)$	$(5, +\infty)$
(x)	$-$	$+$	$+$
$(x-5)$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Poznámka: do tabulky je vhodné psát vždy kulaté závorky

Poznámka: koukám co vyšlo v kolonce řešené podmínky a podle toho napíši závorky.

$$(-\infty, 0\rangle \cup \langle 5, +\infty)$$

Spojení podle dvou polo-výsledků:



$$K \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup \langle 5, +\infty)$$

e) $\log\left(\sqrt{x^2-4}\right)$

Podmínky pro definiční obor:

$x^2 - 4 \geq 0$ (podmínka pro odmocninu)

$\sqrt{x^2-4} > 0$ (podmínka pro logaritmus)

Řeším podmínky:

$x^2-4 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm 4}{2} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

$\sqrt{x^2-4} > 0$

$x^2-4 > 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

Nulové body:

$(x-2) \quad (x-(-2))$

$\Downarrow$

$(x+2)$

Tabulka:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$$K = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$