chybí spočítat s počáteční podmínkou y(4)=-3

PŘÍKLAD:

$$\boxed{y' = -\frac{y}{x}}$$

ZJISTIL JSEM (VIZ NÍŽE), ŽE JDE O DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI

$$y' = p(x) \cdot q(y)$$

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot y \Big/ \cdot \frac{1}{y} \qquad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y\,dx} = -\frac{1}{x} \quad \Big/ \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| + A = -\ln|x| + B$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + B - A$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C$$

$$|y| = e^{-\ln|x| + C}$$

$$|y| = e^{\ln|x|^{-1} + C}$$

$$|y| = e^{\ln|x|^{-1}} \cdot e^{C}$$

$$|y| = |x|^{-1} \cdot C$$

$$y = x^{-1} \cdot C$$

$$y = \frac{C}{x}$$

METODA SPECIÁLNÍ PRAVÉ STRANY

MUSÍ BÝT V TOMTO TVARU - POLYNOM PRAVÉ STRANY MUSÍ VYPADAT TAKTO:

ⓐ

$$\underbrace{P(x)}_{\substack{\text{polynom} \\ \text{(stupně } p)}} e^{ax} \cos bx + \underbrace{Q(x)}_{\substack{\text{polynom} \\ \text{(stupně } q)}} e^{ax} \sin bx$$

(OBČAS SE STANE, ŽE NĚJAKÁ ČÁST BUDE NULOVÁ, BUDE TEDY OBSAHOVAT POUZE JEDEN ČLEN TOHO SOUČTU)

POKUD PRAVÁ STRANA DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VYPADÁ TAKTO, TAK POTOM TO PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ JE VE TVARU HODNĚ PODOBNÝMU:

ⓑ

$$y_p = x^k P_1(x) e^{ax} \cos bx + x^k Q_1(x) e^{ax} \sin bx$$

POKUD PRAVÁ STRANA DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE MÁ TVAR VIZ ⓐ TAK MI TO PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ MŮŽEME NAJÍT V TOMTO TVARU ⓑ.

POPIS:

a, b BUDE DANÝ PODLE PRAVÉ STRANY ⓐ, TO SAMÉ PLATÍ PRO POLYNOMY P A Q. JEDINÉ CO TEĎ POTŘEBUJI ZJISTIT CO TO JE = POLYNOMY: $P_1(x)$ A $Q_1(x)$ O TĚCH ZATÍM NIC NEVÍM.

TYTO POLYNOMY MUSÍ MÍT JEDNU DŮLEŽITOU VLASTNOST: JESTLIŽE TENTO POLYNOM JE NĚJAKÉHO STUPNĚ r A TENHLE POLYNOM NĚJAKÉHO STUPNĚ q, TAK TYHLE DVA POLYNOMY O KTERÝCH ZATÍM NIC NEVÍM, TAK JEDINÁ VĚC KTERÁ JE DANÁ JE TA, ŽE TYTO DVA POLYNOMY $P_1(x)$ A $Q_1(x)$ MUSÍ MÍT STUPEŇ KTERÝ BUDE ROVEN MAXIMU Z TĚHLE DVOU ČÍSEL $\{r, q\}$.

$$y_p = x^k P_1(x) e^{ax} \cos bx + x^k Q_1(x) e^{ax} \sin bx$$

$P_1(x)$, $Q_1(x)$ jsou stupně $\max\{r, q\}$

CO JE TO STUPEŇ POLYNOMU? NEJVYŠŠÍ MOCNINA TOHO x V TOM POLYNOMU.

ČÍSLO k SOUVISÍ S KOEFICIENTEM a a b, SOUVISÍ TAK, ŽE POKUD SI VEZMU TOHLE ČÍSLO $a + bi$, TAK BUDU ZKOUMAT JESTLI TOHLE ČÍSLO JE ŘEŠENÍM TÉ CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE, KTERÁ ODPOVÍDÁ TÉ ROVNICI HOMOGENNÍ.

TADY NA TÉ LEVÉ STRANĚ UDĚLÁM CHARAKTERISTICKOU ROVNICI A ZKOUMÁM JESTLI TOHLE JE ŘEŠENÍM PRÁVĚ TÉTO ROVNICE. POKUD ZJISTÍM, ŽE JE TO ŘEŠENÍM, TAK MĚ ZAJÍMÁ KOLIKANÁSOBNÉ JE TO ŘEŠENÍ. TO ZNAMENÁ

JESTLI TENHLE KOŘEN JE DVOJNÁSOBNÝ, TROJNÁSOBNÝ NEBO JEDNODUCHÝ, PŘÍPADNĚ SE MŮŽE STÁT TO, ŽE TOHLE ČÍSLO ŘEŠENÍM CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE NENÍ, POTOM TO k VOLÍM JAKO NULU.

k ... násobnost čísla $a+bi$ jako řešení hé homogenní diferenciální rovnice

PŘÍKLAD: $\boxed{y'' - 3y' + 2y = e^x}$

1. URČÍM OBECNÉ ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ ROVNICE

HOMOGENNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 = \alpha_1 \\ 1 = \alpha_2 \end{cases}$$

$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ OBECNÉ ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ ROVNICE

LZE POČÍTAT DÁL BUĎ POUŽITÍM VARIACE KONSTANTY NEBO POUŽITÍM METODY SPECIÁLNÍ PRAVÉ STRANY.

2. POUŽIJI METODU SPECIÁLNÍ PRAVÉ STRANY, NEBO-LI ZAJÍMALO BY MNE JESTLI VŠECHNY TY VĚCI MEZI NIMI MOHU ZAVOLIT TAK, ABY MI VYŠLO e^x.

KDYŽ VEZMU:

$$P(x)e^{ax}\cos bt + Q(x)e^{ax}\sin bx = e^{x}$$

ZAJÍMÁ MNE:

a

b

$P(X)$

$Q(X)$

JAK MÁM ZAVOLIT e^{ax} ABYCH DOSTAL e^{x}? $a=1$

$$e^{1x} = e^{x}$$

V TOMHLE ČLENU NEFIGURUJE ANI COSINUS ANI SINUS A NAVÍC TO NENÍ SOUČET, TO ZNAMENÁ, ŽE NÁM Z TOHO NĚCO VYPADLO

JAK MÁM ZAVOLIT b? ABY NÁM COSINUS A SINUS JAKOBY VYPADL.

$b=0$

TAK MÁM $\cos 0x$, COSINUS NULY JE JEDNA

$\sin 0x$ JE NULA, PROTO ČLEN $Q(x)e^{1x}\sin 0x$ VYPADÁVÁ, TÍM DOSTANU $P(x)e^{1x}$

JEŠTĚ NEVÍM JAK ZAVOLIT POLYNOM P(x) ABY VYŠLO e^x

JIŽ VÍM, ŽE Q(x) MOHU ZAVOLIT LIBOVOLNĚ, PROTOŽE SINUS NÁM TO VYNULUJE. JÁ SI ZVOLÍM ZA Q(x) NULU.

$$Q(x) = 0$$

$$P(x) = 1$$

$$(1 \cdot e^x \cdot \underset{\cos 0x}{\underset{\uparrow}{1}})$$

ZJISTIL JSEM:

$$a = 1 \qquad 1 \cdot e^{1x} \cos 0x + 0 \cdot e^{1x} \sin 0x = e^x$$

$$b = 0$$

$$P(x) = 1$$

$$Q(x) = 0$$

3. POTŘEBUJI ČÍSLO k, MÁ TO BÝT NÁSOBNOST ČÍSLA $a + bi$

$$\overset{1}{\overset{\downarrow}{a}} + \overset{0}{\overset{\downarrow}{b}}i = 1$$, A TO k MÁ BÝT NÁSOBNOST TOHOTO ČÍSLA JAKO ŘEŠENÍ TÉ CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE

MÁM CHARAKTERISTICKOU ROVNICI $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, DÁ ŘEŠENÍ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. TEĎ SE PTÁM, ZDA TO ČÍSLO k KTERÝ JSEM DOSTAL, JE ŘEŠENÍM CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE?

$k = 1$ JE ŘEŠENÍM CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE.
KOLIKANÁSOBNÝM JE ŘEŠENÍ, KOLIKRÁT SE V SEZNAMU TĚCH ŘEŠENÍ VYSKYTUJE? JEDNOU

4. STUPEŇ POLYNOMU $P_1(x)$ A $Q_1(x)$.

JAKÉHO STUPNĚ JE POLYNOM $P_1(x)$? NULTÉHO $n = 0$,

PROTOŽE OBSAHUJE x^0, PROTO HO TAM NEVIDÍME.

$q = 0$ TENTO POLYNOM JE TAKÉ STUPNĚ NULA

TYTO DVA POLYNOMY MAJÍ STUPEŇ MAXIMUM V TĚCHTO DVOU ČÍSLECH $P(x) = 1$ $Q(x) = 0$

$P_1(x)$; $Q_1(x)$ stupně 0.

Polynomy $P_1(x)$ a $Q_1(x)$ neobsahují vůbec proměnnou x, to znamená, že můžu říct, že obsahuje x na nultou což je 1, tudíž nám udělá že ten polynom nemá, protože obsahuje x na nultou jako nejvyšší mocninu - stupeň toho polynomu je nula. Obecně polynom pokud má pouze číslo, tak je stupně nula.

5. DOSADÍM DO VZORCE PARTIKULÁRNÍHO ŘEŠENÍ

$$y_P = x^k P_1(x) e^{ax} \cos bx + x^k Q_1(x) e^{ax} \sin bx$$ VZOREC

$$y_P = x^1 P_1(x) e^{1x} \cos 0x + x^1 Q_1(x) e^{1x} \sin 0x$$

ZJEDNODUŠÍM

$$y_P = x P_1(x) e^x$$

ZASE O TOM POLYNOMU NEVÍM VŮBEC NIC, POUZE TO ŽE TEN POLYNOM JE STUPNĚ NULA.

JAK MOHU OBECNĚ ZAPSAT JAKÝKOLIV POLYNOM STUPNĚ NULA? LIBOVOLNOU KONSTANTOU.

$$y_P = x \cdot m \cdot e^x$$

m JE OBECNĚ NĚJAKÉ REÁLNÉ ČÍSLO, KTERÉ JÁ NEZNÁM.

$$y_p = x \cdot m \cdot e^x$$

BUDU DOSAZOVAT DO ZADANÉ (VIZ PŘÍKLAD) DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' - 3y' + 2y = e^x$

UDĚLÁM 1. DERIVACI, m JE KONSTANTA, PROTO JI VYTKNU

$$y' = m \cdot (x \cdot e^x)' = m \cdot [(x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)'] =$$

$$= \underline{m \cdot [e^x + xe^x]}$$

UDĚLÁM 2. DERIVACI, m JE KONSTANTA, PROTO JI VYTKNU

$$y'' = m \cdot (e^x + xe^x)' = m \cdot [(e^x)' + (xe^x)'] =$$

$$= m\,[e^x + (x)' e^x + x \cdot (e^x)'] =$$

$$= m\,[e^x + e^x + xe^x] = \underline{m\,[2e^x + xe^x]}$$

$$m(2e^x + xe^x) - 3m(e^x + xe^x) + 2mxe^x = e^x$$

$$\underline{2me^x} + \underline{mxe^x} \underline{- 3me^x} \underline{-3mxe^x} + \underline{2mxe^x} = e^x$$

$$\underline{2me^x} - \underline{3me^x} = e^x$$

$$-me^x = e^x \quad / \cdot \frac{1}{e^x}$$

$$-m = 1 \quad / \cdot (-1)$$

$$\underline{m = -1}$$

$$y_p = x \cdot (-1) \cdot e^x$$

$$y_p = -xe^x$$

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ VYŠLO

$$\underbrace{\text{OBECNÉ ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ ROVNICE} + \text{PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ}}_{\text{OBECNÉ ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ ROVNICE}}$$

$$Y = y_0 + y_p$$

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - xe^x$$

POZNÁMKA: NĚKTERÉ ROVNICE (ZLOMKY NĚKTERÉ) DIFERENCIÁLNÍ NELZE ŘEŠIT METODOU SPECIÁLNÍ PRAVÉ STRANY (VARIACE KONSTANTY VEDE K VÝSLEDKU VŽDY)

MILAN MROCZKOWSKI
SATA150@GMAIL.COM
YESIT.CZ
YESIT.EU

PŘÍKLAD: $\boxed{y'' + y = 1}$

y'' ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

$$\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{4i^2}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm 2i}{2} \begin{cases} +i = \alpha_1 \\ -i = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\boxed{y_0} = C_1 e^{0x} \cos \overset{1}{\cancel{b}} x + C_2 e^{0x} \sin 1x =$$

NEŘEŠÍM ZNAMÉNKO, VŽDY KLADNÉ

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

POLYNOM PRAVÉ STRANY:

$$P(x) e^{ax} \cos bx + Q(x) e^{ax} \sin bx = 1$$

$\cancel{\cos 0x + \sin 0x} = 1$

$a = 0$
$b = 0$
$P(x) = 1$
$Q(x) = 0$

KDYŽ KOUKNU NA PRAVOU STRANU, TAK TAM SINUS A COSINUS NENÍ

KDYŽ KOUKNU NA PRAVOU STRANU, TAK TAM $\sin x$ a $\cos x$ NENÍ.

$\boxed{\text{ČÍSLO } k}$ ~~JE NÁSOBKEM ČÍSLA~~ $\overset{0}{a} + \overset{0}{b}i = 0$ ~~KRÁT~~

~~ŘEŠENÍ SE NEVYSKYTUJE VŮBEC~~

~~VIZ: $a = 0$, $b = 0$, PROTO~~ ~~$k = 0$~~

KOLIKANÁSOBNÝM KOŘENEM JE TOHLE V TÉ CHARAKTERISTICKÉ ROVNICI? (VYŠLO $1i$, $-1i$) NEVYŠLA ANI JEDNOU NULA PROTO $k = 0$

$\boxed{\text{DOSADÍM DO VZORCE PARTIKULÁRNÍHO ŘEŠENÍ}}$

$$y_p = x^k P_1(x) e^{ax} \cos bx + x^k Q_1(x) e^{ax} \sin bx$$

$$y_p = x^0 P_1(x) e^{0x} \cos 0x + x^0 Q_1(x) e^{0x} \sin 0x$$

$$y_p = 1 \cdot P_1(x) \cdot 1 \cdot 1 \quad + 1 \cdot Q_1(x) \cdot 1 \cdot 0$$

$$y_p = P_1(x)$$

VÍM JEN TO, ŽE POLYNOM $P_1(x)$ JE STUPNĚ NULA.
(PROTO NAHRADÍM KONSTANTOU)

$y_p = \underline{m} \qquad m \in R$ DOSAZUJI DO: $y'' + y = 1$

$$y' = m \cdot [0]' = 0$$

$$y'' = m \cdot [0]' = \underline{m \cdot 0}$$

$$m \cdot 0 + m = 1$$

$$0 + m = 1$$

$$m = 1$$

$$y_p = 1$$

$$\underline{Y} = y_0 + y_p = \underline{\underline{C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1}}$$

PŘÍKLAD: $\boxed{y''' + y'' + y' + y = x^3}$ y''' ROVNICE TŘETÍHO ŘÁDU

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$$\alpha^2(\alpha+1) + 1(\alpha+1) = 0$$

$$(\alpha^2+1)(\alpha+1) = 0$$

$\alpha^2 + 1 = 0$ $\qquad$ $\alpha + 1 = 0$

$\alpha^2 = -1$ $\qquad$ $\alpha = -1$

$\alpha = \pm\sqrt{-1}$

$\alpha = \pm\sqrt{i^2}$

$\alpha = \pm i$

$$\underline{y_0} = C_1 e^{-1x} + C_2 e^{0x}\cos 1x + C_3 e^{0x}\sin 1x =$$

$$= \underline{C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x}$$

POLYNOM PRAVÉ STRANY

$$P(x)\, e^{ax}\cos bx + Q(x)\, e^{ax}\sin bx = x^3$$

$a = 0$

$b = 0$

$P(x) = x^3$

$Q(x) = 0$

PROTOŽE, KDYŽ KOUKNU NA PRAVOU STRANU ~~$C_2\cos x + C_3\sin x$~~ TAK e TAM VŮBEC NENÍ, TAK $a = 0$

PROTOŽE, KDYŽ KOUKNU NA PRAVOU STRANU TAK $\sin x$ A $\cos x$ NENÍ

$\boxed{\text{ČÍSLO } k}$ JE NÁSOBKEM ČÍSLA $\overset{0}{a} + \overset{0}{b}i = 0$ ~~COŽ JE k~~

ŘEŠENÍ ~~VIZ~~ $a=0$, $b=0$ ~~SE VYSKYTUJE~~

~~NULAKRÁT~~. KOLIKANÁSOBNÝM KOŘENEM JE TOHLE V TÉ CHARAKTERISTICKÉ ROVNICI? ~~$k=0$~~ (VYŠLO $1i, -1i, -1$) NEVYŠLA ANI JEDNOU NULA, PROTO ~~NULAKRÁT VYŠEL k~~ $k=0$ NULAKRÁT TO VYŠLO

$\boxed{\text{DOSADÍM DO VZORCE PARTIKULÁRNÍHO ŘEŠENÍ}}$

$$y_p = x^k P_1(x) e^{ax} \cos bx + x^k Q_1(x) e^{ax} \sin bx$$

$$y_p = x^0 P_1(x) e^{0x} \cos 0x + x^0 Q_1(x) e^{0x} \sin 0x$$

$$y_p = P_1(x)$$

VÍM JEN TO, ŽE POLYNOM $P_1(x)$ JE STUPNĚ ~~NULA~~ TŘETÍHO ~~(PROTO NAHRADÍM KONSTANTOU)~~ VIZ x^3, PROTO OBECNĚ ZAPÍŠI POLYNOM 3. STUPNĚ

DOSAZUJI DO $y''' + y'' + y' + y = x^3$

$$y_p = \cancel{P_1(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

MUSÍM NAPSAT ~~NAPÍŠI~~ POLYNOM V NEJŠIRŠÍ MOŽNOSTI JAK MŮŽE NASTAT

$$y' = a \cdot 3x^2 + b \cdot 2x + c$$

$\boxed{\text{POZNÁMKA: DERIVACE} \quad (C \cdot f)' = C \cdot f'}$

$$y'' = a \cdot 6x + b \cdot 2$$

$$y''' = 6a$$

DOSAZUJI DO $y''' + y'' + y' + y = x^3$

$$6a + 6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3$$

KOUKNU NA PRAVOU STRANU ROVNICE, ZDE JE x^3, NA LEVÉ STRANĚ ROVNICE VIDÍM ax^3, ABY BYLA ROVNOST, TAK $a = 1$.

[$\cancel{ax^3 = x^3}$]

$$ax^3 = x^3 \quad / \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$a = 1$$

KOUKNU NA PRAVOU STRANU ROVNICE, ZDE NENÍ x^2, NA LEVÉ STRANĚ ROVNICE VIDÍM $3ax^2$ A bx^2, TEDY NA PRAVÉ STRANĚ NENÍ NIC, TAKŽE JE TAM NULA.

$$3ax^2 + bx^2 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$3a + b = 0$$

KOUKNU NA PRAVOU STRANU ROVNICE, ZDE NENÍ x^1, NA LEVÉ STRANĚ ROVNICE VIDÍM $6ax$, $2bx$, cx. NA PRAVÉ STRANĚ NENÍ NIC, TAKŽE JE TAM NULA.

$$6ax + 2bx + cx = 0 \quad / \cdot \frac{1}{x}$$

$$6a + 2b + c = 0$$

KOUKNU NA PRAVOU STRANU ROVNICE, ZDE NENÍ KONSTANTA, NA LEVÉ STRANĚ ROVNICE VIDÍM $6a$, $2b$, c, d. NA PRAVÉ STRANĚ NENÍ NIC, TAKŽE JE TAM NULA

$$6a + 2b + c + d = 0$$

DOSTAL JSEM SOUSTAVU 4 ROVNIC O 4 NEZNÁMÝCH.

$$a=1$$
$$3a+b=0$$
$$6a+2b+c=0$$
$$6a+2b+c+d=0$$

$$\underline{a=1}$$
$$3\cdot 1+b=0 \qquad \underline{b=-3}$$
$$6\cdot 1+\overset{2\cdot(-3)}{\cancel{}}+c=0 \qquad \underline{c=0}$$
$$6\cdot 1+2\cdot(-3)+0+d=0 \qquad \underline{d=0}$$

$$y_p=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$y_p=1\cdot x^3+(-3)x^2+0x+0$$
$$y_p=x^3-3x^2$$

$$Y=y_0+y_p$$

$$\underline{\underline{Y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+x^3-3x^2}}$$

PŘÍKLAD: $\boxed{y^{IV} + 4y'' = 45 \sin 3x}$ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$\alpha^4 + 4\alpha^2 = 0$$

$$\alpha^2(\alpha^2 + 4) = 0$$

$\alpha^2 = 0$

$\alpha = \pm\sqrt{0}$

$\alpha = \pm 0 \qquad \alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = 0$

$\alpha^2 + 4 = 0$

$\alpha^2 = -4$

$\alpha = \pm\sqrt{-4}$

$\alpha = \pm\sqrt{4i^2}$

$\alpha = \pm 2i$

$\alpha_3 = 2i$

$\alpha_4 = -2i$

malé

$$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 X e^{0x} + C_3 e^{0x} \cos 2x + C_4 e^{0x} \sin 2x$$

$$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

POLYNOM PRAVÉ STRANY

$$P(x)\, e^{ax} \cos bx + Q(x)\, e^{ax} \sin bx = 45 \sin 3x$$

$a = 0$

$b = 3$

$P(x) = 0$

$Q(x) = 45$

ČÍSLO k

$a + bi$

$0 + 3i = 3i = 3 \cdot 1 = 3$

~~TEĎ SE PTÁM, JE ČÍSLO~~

KOLIKANÁSOBNÝM KOŘENEM JE TOHLE V TÉ CHARAKTERISTICKÉ ROVNICI? (VYŠLO: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 2i, \alpha_4 = -2i$),

NEVYŠLA ANI JEDNOU TROJKA

$k = 0$

DOSADÍM DO VZORCE PARTIKULÁRNÍHO ŘEŠENÍ

$y_p = x^k P_1(x) e^{ax} \cos bx + x^k Q_1(x) e^{ax} \sin bx$

$y_p = x^0 P_1(x) e^{0x} \cos 3x + x^0 Q_1(x) e^{0x} \sin 3x$

$y_p = P_1(x) \cos 3x + Q_1(x) \sin 3x$

$y_p = m \cos 3x + n \sin 3x \qquad m, n \in R$

$\cancel{y' = m \sin(\cos 3x)'}$

$y' = (m \cos 3x)' + (n \sin 3x)' =$

$= m(\cos 3x)' + n(\sin 3x)' =$

$= -m \sin 3x \cdot (3x)' + n \cos 3x \cdot (3x)' =$

$= -m \sin 3x \cdot 3 + n \cos 3x \cdot 3$

$$y'' = (-m \sin 3x \cdot 3 + n \cos 3x \cdot 3)' =$$

$$\cancel{y} = -m(\sin 3x \cdot 3)' + n(\cos 3x \cdot 3)' =$$

$$\cancel{= -m\,[(\sin 3x)' \cdot 3 + \sin 3x \cdot (3)']}$$

$$= -3m(\sin 3x)' + 3n(\cos 3x)' =$$

$$= -3m \cos 3x \cdot (3x)' + 3n(-\sin 3x) \cdot (3x)' =$$

$$= -3m \cos 3x \cdot 3 - 3n \sin 3x \cdot 3$$

$$y''' = -9m(\cos 3x)' - 9n(\sin 3x)' =$$

$$= +9m \sin 3x \cdot 3 - 9n \cos 3x \cdot 3 =$$

$$\cancel{= 9m \sin 3x \cdot 3}$$

$$= 27m \sin 3x - 27n \cos 3x$$

$$y^{IV} = 27m(\sin 3x)' - 27n(\cos 3x)' =$$

$$= 27m \cos 3x \cdot 3 + 27n \sin 3x \cdot 3$$

DOSAZUJI DO PŮVODNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE: $y^{IV} + 4y'' = 45\sin 3x$

$27m\cos 3x \cdot 3 + 27n\sin 3x \cdot 3 + 4(-3m\cos 3x \cdot 3 - 3n\sin 3x \cdot 3) = 45\sin 3x$

$81m\cos 3x + 81n\sin 3x + 4(-9m\cos 3x - 9n\sin 3x) = 45\sin 3x$

$81m\cos 3x + 81n\sin 3x - 36m\cos 3x - 36n\sin 3x = 45\sin 3x$

$45m\cos 3x + 45n\sin 3x = 45\sin 3x$

$45n\sin 3x = 45\sin 3x \;/\cdot \frac{1}{45\sin 3x}$

$\underline{n = 1}$

$\underline{m = 0}$

dosadím

$Y = y_0 + y_p$

$y_p = m\cos 3x + n\sin 3x$

$Y = C_1 + C_2 x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + \sin 3x$

ÚLOHY S POČÁTEČNÍ PODMÍNKOU

$$\boxed{y'' + 2y' + 2y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 2}$$

JEDNA PODMÍNKA PRO SAMOTNOU FUNKCI y KTERÁ JE ŘEŠENÍM DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE, DRUHÁ PODMÍNKA PRO DERIVACI TÉ FUNKCE

SESTAVÍM CHARAKTERISTICKOU ROVNICI

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4i^2}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} \begin{cases} -1 + i \\ -1 - i \end{cases}$$

$$y_0 = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$$

$a + bi$

VIZ POČÁTEČNÍ PODMÍNKA PRO $y(0) = 1$

$$1 = C_1 e^{-0} \cos 0 + C_2 e^{-0} \sin 0$$

$$C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 = 1$$

$$C_1 \cdot 1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 \cdot 0 = 1$$

$$\underline{C_1 = 1}$$

PRO DRUHOU PODMÍNKU $y'(0) = 2$

$$y' = (C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x)' =$$

$$= C_1 [e^{-x} \cos x]' + C_2 [e^{-x} \sin x]' =$$

$$= C_1 [(e^{-x})' \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (\cos x)'] + C_2 [(e^{-x})' \sin x + e^{-x} \cdot (\sin x)'] =$$

$$= C_1 [e^{-x} \cdot (-1) \cos x + e^{-x} \cdot (-\sin x)] + C_2 [e^{-x} \cdot (-1) \sin x + e^{-x} \cdot \cos x]$$

$$2 = C_1 [e^{-0} \cdot (-1) \cos 0 + e^{-0} \cdot (-\sin 0)] + C_2 [e^{-0} \cdot (-1) \sin 0 + e^{-0} \cdot \cos 0]$$

$$2 = -C_1 + C_2$$

$$2 = -1 + C_2$$

$$3 = C_2$$

JAKÉ ŘEŠENÍ TÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SPLŇUJE POČÁTEČNÍ PODMÍNKY?

$$\underline{\underline{Y = 1 e^{-x} \cos x + 3 e^{-x} \sin x}}$$

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ

PŘÍKLAD: $\boxed{y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = 1}$

$$\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{4i^2}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm 2i}{2} \begin{cases} i = \alpha_1 \\ -i = \alpha_2 \end{cases}$$

$$y_0 = C_1 e^{0x} \cos 1x + C_2 e^{0x} \sin 1x =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ZVOLÍM METODU VARIACE KONSTANTY $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \qquad / \cdot \sin x$$

$$C_1'(x) - \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x} \qquad / \cdot \cos x$$

$$C_1'(x) \sin x \cos x + C_2'(x) \sin x \sin x = 0$$

$$C_1'(x) - \sin x \cos x + C_2'(x) \cos x \cos x = 1 \qquad /+$$

$$C_2'(x) \sin^2 x + C_2'(x) \cos^2 x = 1$$

$$C_2'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 \qquad C_2(x) = \int 1\,dx$$

$$C_2'(x) \cdot 1 = 1 \qquad C_2(x) = x$$

$$\underline{C_2'(x) = 1}$$

C_2 JIŽ ZNAM, ALE JEŠTĚ NE C_1

POZNÁMKA: NA NÍ NENÍ MOŽNÉ POUŽÍT METODU SPECIÁLNÍ PRAVÉ STRANY, PROTOŽE PRAVÁ STRANA DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DO TOHO NESPADÁ, PROTOŽE JE TAM JEDNA LOMENO, JAKMILE MÁM ZLOMKY, TAK TO NIKDY NEPŮJDE. NEJDOU ANI ODMOCNINY.

$$C_1'(x)\cos x + 1 \sin x = 0$$

$$C_1'(x)\cos x = -\sin x \quad / \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_1(x) = \int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$-\int \frac{\sin x}{\cos x} = \left| \begin{array}{l} \cos x = s \\ -\sin x\,dx = ds \\ dx = \dfrac{ds}{-\sin x} \end{array} \right| = -\int \frac{\sin x}{s} \cdot \frac{ds}{-\sin x} =$$

$$= -\int \frac{\sin x}{s} \cdot \frac{1}{-\sin x}\,ds = -\int \frac{1}{s}\,\frac{\sin x}{-\sin x}\,ds =$$

$$= -\int \frac{1}{s} \cdot (-1)\,ds = \int \frac{1}{s}\,ds = \ln|s| + C =$$

$$= \underline{\ln|\cos(x)| + C}$$

$$C_1(x) = \ln|\cos x|$$

DOSADÍM DO VARIACE KONSTANTY

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

$$y = \ln|\cos x|\cos x + x\cdot\sin x$$

$$Y = y_0 + y_p$$

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x + \ln|\cos x|\cos x + x\sin x$$

TEĎ DOSADÍM POČÁTEČNÍ PODMÍNKY $y(0)=3$

$$3 = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 + \ln|\cos 0|\cos 0 + 0\sin 0$$

$$3 = C_1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y' = [C_1\cos x + C_2\sin x + \ln|\cos x|\cos x + x\sin x]' =$$

$$= C_1(\cos x)' + C_2(\sin x)' + [\ln\underbrace{|\cos x|}_{\text{PŘEDPOKLÁDÁM KLADNÝ}}\cos x]' + [x\sin x]' =$$

$$= C_1(-\sin x) + C_2\cos x + [(\ln|\cos x|)'\cdot\cos x + \ln|\cos x|\cdot(\cos x)'] + [x\sin x]' =$$

$$= C_1(-\sin x) + C_2\cos x + [\frac{1}{\cos x}\sin x\cdot\cos x + \ln|\cos x|\cdot(-\sin x)] + [x\sin x]' =$$

$$= C_1(-\sin x) + C_2\cos x + [\sin x + \ln|\cos x|(-\sin x)] + [(x)'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)'] =$$

$$= C_1(-\sin x) + C_2\cos x + \sin x + \ln|\cos x|(-\sin x) + \sin x + x\cos x$$

$$1 = C_1(-\sin 0) + C_2\cos 0 + \sin 0 + \ln|\cos 0|(-\sin 0) + \sin 0 + 0\cos 0$$

$$1 = C_2$$

$$Y = 3\cos x + 1\sin x + \ln|\cos x|\cos x + x\sin x$$

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SPLŇUJÍ DVĚ PODMÍNKY, ŽE PROCHÁZÍ BODEM [0;3] A JEHO DERIVACE PROCHÁZÍ BODEM [0;1].

1) $y' = y \cdot \operatorname{tg} x + \cos x$ — 1. ŘÁDU, není se separovatelnými, protože $\cos x$ je tam navíc

2) $y''' - 12y' + 16y = 0$ — 3. ŘÁDU, homogenní

3) $y'x - 4y = x^2\sqrt{y}$ — BERNOULIHO, protože y s odmocninou ~~navíc~~

4) $y' = y^2$ — SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI

5) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$ - ROVNICE 2 ŘÁ, NEHOMOGENNÍ METODA SPECIÁLNÍ PRAVÉ STRANY

~~$y''' \; 2y$~~

6) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ - HOMOGENNÍ 3. ŘÁDU

7) $y' = \frac{y}{x} + 1$ - PRVNÍHO ŘÁDU. [SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI BY VYPADALA $y' = \frac{y}{x}$]

8) $y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \frac{\ln x}{x}$ BERNOULIHO

9) $y''' + y'' + y' + y = x^3$ NEHOMOGENNÍ 3 ŘÁDU

10) $(y - \sin x)y' = \frac{y}{x}(y - \sin x)$ SEPAR. PROM. A VÝJIMEČNÉ ŘEŠENÍ

11) $y' = -(x)^{-1}(x + y)$ — ~~[illegible]~~ ROVNICE 1. ŘÁDU

12) $y'' = -4y$ ~~SEPAR.~~ ~~DRUHÉHO ŘÁDU~~ 2. ŘÁDU HOMOGENNÍ [ABY BYLA NEHOMOGENNÍ MUSÍ BÝT NA PRAVÉ STRANĚ FUNKCE PROMĚNNÉ x

13) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$ ~~SEPAR~~ BERNOUL.

14) $y' - \ln x = 0$ ~~BERNOUL~~. SEPAR.

15) $y'' - 4y' + 4y = x^2$ DRUH. ŘÁDU, NEHOMOGENNÍ

např. $y'' - 4y = x$ NEHOMOGENNÍ

${\color{magenta}\text{}}$plus je pravou stranou vypočítat

$y'x - 4y = x^2 y^1$ — LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ 1. ŘÁDU

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE:

a) SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

b) LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

c) BERNOULIHOVA ROVNICE

d) VYŠŠÍHO ŘÁDU (HOMOGENNÍ nebo NEHOMOGENNÍ)
(NEŽ JEDNA)

SPECIÁLNÍ PŘÍPAD BERNOULIHO ROVNICE JE
LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ

SPECIÁLNÍ PŘÍPAD LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE
JE SE SEPAROV. PROMĚNNÝMI

TAKŽE SE
DÁ ~~SE~~ ŘÍCI ŽE VŠECHNY ROVNICE 1. ŘÁDU
JSOU BERNOULIHO

1. $y' = y \cdot \operatorname{tg} x + \cos x$ I. ŘÁDU (NENÍ SE SEPAROVATELNÝMI, PROTOŽE VADÍ $+\cos x$)
2. $y''' - 12y' + 16y = 0$ HOMOGENNÍ
3. $y'x - 4y = x^2\sqrt{y}$ BERNOULIHO, ODMOCNINA (KDYBY NA PRVOU: LINEÁRNÍ DIFER. R. I. ŘÁDU)
4. $y' = y^2$ SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI
5. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$ ROVNICE II. ŘÁDU NEHOMOGENNÍ
6. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ HOMOGENNÍ III. ŘÁDU
7. $y' = \frac{y}{x} + 1$ I. ŘÁDU
8. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \frac{\ln x}{x}$ BERNOULIHO
9. $y''' + y'' + y' + y = x^3$ 3. ŘÁDU NEHOMOGENNÍ
10. $(y - \sin x)y' = \frac{y}{x}(y - \sin x)$ SE SEPAROVANÝ PROMĚNNÝMI
11. $y' = -(x)^{-1}(x + y)$ 1. ŘÁDU
12. $y'' = -4y$ 2. ŘÁDU HOMOGENNÍ (ABY BYLA NEHOMOGENNÍ MUSELA BY BÝT NA PRAVÉ STRANĚ PROMĚNNÁ x)
13. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$ BERNOULIHO
14. $y' - \ln x = 0$ SEPAROVANÝ
15. $y'' - 4y' + 4y = x^2$ 2. ŘÁDU NEHOMOGENNÍ

ZKUS VYŘEŠIT METODOU PRAVÉ STRANY

TOTO NENÍ POSLEDNÍ ÚPRAVA, POSLEDNÍ ÚPRAVA JE PSANÁ PROPISKOU PŘÍKLADY (PŘEDCHOZÍ LIST)