# LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE I. ŘÁDU

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

MILAN MROCZKOWSKI
YESIT.CZ
SATA150@GMAIL.COM

ZADÁNÍ $\boxed{y' + \frac{y}{x \ln x} = 1}$ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$y' + \frac{1}{x \ln x} \cdot y = 1$$

ZJISTIL JSEM, ŽE ODPOVÍDÁ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI PRVNÍHO ŘÁDU $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

1\. KROK: NAHRADÍM PRAVOU STRANU NULOU (HOMOGENNÍ ROVNICE), JEDNIČKA SE ŘEŠÍ AŽ U DRUHÉHO KROKU: VARIACE KONSTANTY.

$$y' + \frac{1}{x \ln x} \cdot y = 0$$

$$y' = 0 - \frac{y}{x \ln x} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x \ln x} \quad \Big/ \cdot dx$$

$$\frac{1}{y}\, dy = -\frac{1}{x \ln x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -\frac{1}{x \ln x}\, dx$$

POZNÁMKA

$$-\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = s \\ \frac{1}{x} dx = ds \\ dx = x\, ds \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{1}{x \cdot s} x\, ds = -\int \frac{1}{s}\, ds =$$

$$= -\ln|s| + C = -\ln|\ln x| + C$$

POZNÁMKA

$$\int + \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

$$\ln|y| + A = -\ln|\ln x| + B$$

$$\ln|y| = -\ln|\ln x| + B - A$$

$$\ln|y| = -\ln|\ln x| + C$$

$$|y| = e^{-\ln|\ln x| + C}$$

$$|y| = e^{-\ln|\ln x|} \cdot e^{C}$$

$$|y| = e^{-\ln|\ln x|} \cdot D$$

$$|y| = e^{\ln|\ln x|^{-1}} \cdot D$$

$$y = |\ln x|^{-1} \cdot E$$

$$y = \frac{1}{\ln x} \cdot E \qquad \text{OBECNÝ TVAR}$$

2. KROK : VARIACE KONSTANTY

$$y = \frac{1}{\ln x} \cdot E(x)$$ A DOSAZUJI DO ZADÁNÍ:

$$y' + \frac{y}{x \ln x} = 1$$

$$y' = \left[\frac{1}{\ln x} \cdot E(x)\right]' = \left(\frac{1}{\ln x}\right)' \cdot E(x) + \frac{1}{\ln x} \cdot E'(x) =$$

$$= \left[\frac{(1)' \cdot \ln x - 1 \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2}\right] \cdot E(x) + \frac{1}{\ln x} \cdot E'(x) =$$

$$= \frac{-1 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} \cdot E(x) + \frac{1}{\ln x} \cdot E'(x) =$$

$$= -\frac{1}{x \ln^2 x} \cdot E(x) + \frac{1}{\ln x} \cdot E'(x)$$

DOSAZUJI DO ZADÁNÍ $y' + \frac{y}{x \ln x} = 1$

$$-\frac{E(x)}{x \ln^2 x} + \frac{E'(x)}{\ln x} + \frac{\frac{E(x)}{\ln x}}{x \ln x} = 1$$

$$-\frac{E(x)}{x \ln^2 x} + \frac{E'(x)}{\ln x} + \frac{E(x)}{x \ln^2 x} = 1$$

$$\frac{E'(x)}{\ln x} = 1 \quad \Big| \cdot \ln x$$

$$E'(x) = \ln x$$

$$E(x) = \int \ln x \, dx$$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$E(x) = x \ln x - x + C$$

DOSADÍM "DO TVARU" VARIACE KONSTANTY

$$y = \frac{1}{\ln x} \cdot E(x)$$

$$y = \frac{1}{\ln x} \cdot x \ln x - x + C$$

$$y = \frac{x \ln x - x + C}{\ln x} = \frac{x \ln x}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} + \frac{C}{\ln x} =$$

$$= x - \frac{x}{\ln x} + \frac{C}{\ln x} = -\frac{x}{\ln x} + \frac{C}{\ln x} + x =$$

$$= \frac{-x + C}{\ln x} + x = \frac{C - x}{\ln x} + x$$

$$y = \frac{C - x}{\ln x} + x$$

ZADÁNÍ: $\boxed{y' = -(x)^{-1}(x+y)}$ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$y' = -\frac{1}{x}(x+y)$$

$$y' = -\frac{x}{x} - \frac{y}{x}$$

$$y' = -1 - \frac{y}{x}$$

$$y' = -1 - \frac{1}{x} \cdot y$$

ZJISTIL JSEM, ŽE JDE O $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = -1$$

1. KROK: NAHRADÍM PRAVOU STRANU NULOU (HOMOGENNÍ ROVNICE), −1 SE ŘEŠÍ AŽ U DRUHÉHO KROKU - VARIACE KONSTANTY

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0$$

$$y' = -\frac{1}{x} y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} y \quad / \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \quad / \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -\frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln|y| + A = -\ln|x| + B$$
$$\ln|y| = -\ln|x| + B - A$$
$$\ln|y| = -\ln|x| + C$$
$$|y| = e^{-\ln|x| + C}$$
$$|y| = e^{\ln|x|^{-1}} \cdot e^{C}$$
$$|y| = e^{\ln|x|^{-1}} \cdot D$$
$$|y| = |x|^{-1} \cdot D$$
$$y = x^{-1} \cdot E$$

2. KROK : VARIACE KONSTANTY

$$y = x^{-1} \cdot E(x)$$

DOSAZUJI DO ZADÁNÍ

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = -1$$

$$y' = [x^{-1} \cdot E(x)]' = (x^{-1})' \cdot E(x) + x^{-1} \cdot [E(x)]' =$$
$$= -1 \cdot x^{-1-1} \cdot (x)' \cdot E(x) + x^{-1} \cdot E'(x) =$$
$$= -x^{-2} \cdot 1 \cdot E(x) + x^{-1} \cdot E'(x) =$$
$$= -x^{-2} \cdot E(x) + x^{-1} \cdot E'(x)$$
$$= -\frac{1}{x^2} \cdot E(x) + x^{-1} \cdot E'(x)$$

DOSAZUJI DO ZADÁNÍ

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = -1$$

$$-\frac{1}{x^2} \cdot E(x) + x^{-1} \cdot E'(x) + \frac{1}{x} \cdot x^{-1} \cdot E(x) = -1$$

$$-\frac{1}{x^2} \cdot E(x) + x^{-1} \cdot E'(x) + \frac{\frac{1}{x}}{x} \cdot E(x) = -1$$

$$\cancel{-\frac{1}{x^2} \cdot E(x)} + \frac{1}{x} \cdot E'(x) + \cancel{\frac{1}{x^2} \cdot E(x)} = -1$$

$$\frac{1}{x} \cdot E'(x) = -1 \quad / \cdot x$$

$$E'(x) = -x$$

$$E(x) = \int -x \, dx$$

$$E(x) = -\int x \, dx$$

$$E(x) = -\frac{x^2}{2} + F$$

DOSADÍM "DO TVARU" VARIACE KONSTANTY

$$y = x^{-1} \cdot E(x)$$

$$y = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{F}{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{F}{1} =$$

$$= -\frac{x^2}{2x} + \frac{F}{x} =$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{F}{x}$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{x}{2} + \frac{F}{x}}}$$

ZADÁNÍ: $\boxed{y' - 2xy = 2x^3y^2}$

$$y' - 2x \cdot y = 2x^3 \cdot y^2$$

ZJISTIL JSEM, ŽE ODPOVÍDÁ BERNOULIHO ROVNICI

$$\boxed{y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n}$$

$$\boxed{z = y^{1-n}}$$

1) CÍL: DOSTAT OBECNÝ TVAR

PROVEDU: a) SUBSTITUCI

b) DERIVACI

c) VYJÁDŘÍM $y'$

$$z = y^{1-2}$$

$$z = y^{-1}$$

$$z' = (y^{-1})'$$

$$z' = -1y^{-1-1} \cdot (y)'$$

$$\boxed{y \neq 0} \qquad z' = -y^{-2} \cdot (y)' \Big/ \cdot \frac{1}{-y^{-2}}$$

$$\frac{z'}{-y^{-2}} = y'$$

$$\frac{z'}{-\frac{1}{y^2}} = y'$$

$$-z'y^2 = y'$$

d) DOSAZENÍ DO ZADÁNÍ, POUŽIL JSEM SUBSTITUCI, PROTO SE $y$ ZBAVUJI.

$z = y^{-1}$

$$y' - 2x \cdot y = 2x^3 \cdot y^2$$

$$-z' y^2 - 2x \cdot y = 2x^3 \cdot y^2 \quad / \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$-z' - 2x \cdot y^{-1} = 2x^3$$

$$-z' - 2x \cdot z = 2x^3$$

OBECNÝ TVAR (NEMÁ $y$)

**a z dát na jednu stranu**

2) HOMOGENNÍ ROVNICE

$$-z' - 2xz = 0$$

$$-z' = 2xz \quad / \cdot (-1)$$

ZÁPIS VŽDY NAHORU

$$z' = -2xz$$

$$\frac{dz}{dx} = -2xz \quad / \cdot dx$$

$$dz = -2xz\, dx \quad / \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{z} = -2x\, dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int -2x\, dx$$

$$\int \frac{1}{z} dz = -2 \int x\, dx$$

$$\ln|z| + A = -2\frac{x^2}{2} + B$$

$$\ln|z| = -x^2 + B - A$$

$$\ln|z| = -x^2 + C$$

$$\ln|z| = -x^2 + C$$
$$|z| = e^{-x^2+C}$$
$$|z| = e^{-x^2} \cdot e^{C}$$
$$|z| = e^{-x^2} \cdot D$$
$$z = e^{-x^2} \cdot K \qquad K \in R$$

3. VARIACE KONSTANTY

$$z = e^{-x^2} \cdot K(x)$$

Z DŮVODU, ŽE BYLA POUŽITA SUBSTITUCE, TAK DOSAZUJI DO OBECNÉHO TVARU.

$$-z' - 2xz = 2x^3$$

$$z' = \left[e^{-x^2} \cdot K(x)\right]' =$$
$$= \left(e^{-x^2}\right)' \cdot K(x) + e^{-x^2} \cdot \left[K(x)\right]'$$
$$= e^{-x^2} \cdot \left(-x^2\right)' \cdot K(x) + e^{-x^2} \cdot K'(x)$$
$$= -2x e^{-x^2} \cdot K(x) + e^{-x^2} \cdot K'(x)$$
$$= e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot K(x) + e^{-x^2} \cdot K'(x)$$

$$-\left[e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot k(x)+e^{-x^2}\cdot k'(x)\right]-2x\left[e^{-x^2}\cdot k(x)\right]=2x^3$$

$$-e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot k(x)-e^{-x^2}\cdot k'(x)-2x\,e^{-x^2}\cdot k(x)=2x^3$$

$$\cancel{2x\,e^{-x^2}\cdot k(x)}-e^{-x^2}\cdot k'(x)\,\cancel{-2x\,e^{-x^2}\cdot k(x)}=2x^3$$

$$-e^{-x^2}\cdot k'(x)=2x^3$$

$$e^{-x^2}\cdot k'(x)=-2x^3$$

$$\frac{1}{e^{x^2}}\cdot k'(x)=-2x^3\quad /\cdot e^{x^2}$$

$$k'(x)=-2x^3e^{x^2}$$

$$k(x)=-2\int x^3e^{x^2}$$

$$-2\int x^3e^{x^2}=\left|\begin{matrix}x^2=s\\2x\,dx=ds\\dx=\frac{ds}{2x}\end{matrix}\right|=-2\int x\cdot s\,e^s\frac{ds}{2x}=$$

$$=-2\int\frac{x\cdot s}{2x}\cdot e^s\,ds=\int\frac{-2x\,s}{2x}\cdot e^s\,ds=$$

$$=-\int s\,e^s\,ds=\left|\begin{matrix}u=s & u'=1\\v'=e^s & v=e^s\end{matrix}\right|=$$

$$=-\left[s\cdot e^s-\int 1\cdot e^s\,ds\right]=-s\,e^s+\int e^s\,ds=$$

$$=-s\,e^s+e^s+C=-x^2e^{x^2}+e^{x^2}+C$$

$$z = e^{-x^2} \cdot K(x)$$

ZE SUBSTITUCE

$$y^{-1} = e^{-x^2} \cdot \left[ -x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + C \right]$$

$$y^{-1} = -x^2 + 1 + Ce^{-x^2} \quad / ^{\cdot(-1)}$$

$$y = \left( -x^2 + 1 + Ce^{-x^2} \right)^{-1}$$

**DVĚ ŘEŠENÍ**

$$y = \frac{1}{1 - x^2 + Ce^{-x^2}}$$

**y = 0 výjimečné řešení**

$$\boxed{y' - \cos x - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad y(1)=2}$$

ÚLOHA
S POČÁTEČNÍ
PODMÍNKOU

$$y' = 0 + \cos x + \frac{1}{1+x^2}$$

$$y' = \cos x + \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{1}{1+x^2} \quad / \cdot dx$$

$$\int 1\,dy = \int \cos x + \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$y + A = \sin x + \operatorname{arctg} x + B$$

$$y = \sin x + \operatorname{arctg} x + B - A$$

$$y = \sin x + \operatorname{arctg} x + C$$

$$2 = \sin 1 + \operatorname{arctg} 1 + C$$

$$2 - \sin 1 - \operatorname{arctg} 1 = C$$

$$2 - \sin 1 - \frac{\pi}{4} = C$$

$$\underline{\underline{y = \sin x + \operatorname{arctg} x + 2 - \sin 1 - \frac{\pi}{4}}}$$

ÚLOHA S POČÁTEČNÍ PODMÍNKOU

$$\boxed{x^2y' + xy = \ln x \qquad y(1) = \frac{1}{2}}$$

$$x^2y' + xy = \ln x \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$y' + \frac{xy}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x^2}$$

HOMOGENNÍ ROVNICE

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \qquad \Big/ - \frac{y}{x}$$

$$y' = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{y} \qquad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y\,dx} = -\frac{1}{x} \qquad \Big/ \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| + A = -\ln|x| + B$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + B - A$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C$$

$$|y| = e^{-\ln|x| + C}$$

$$|y| = e^{-\ln|x|} \cdot e^{C}$$

$$|y| = e^{\ln|x|^{-1}} \cdot e^{C}$$

$$|y| = |x|^{-1} \cdot K$$

$$y = x^{-1} \cdot K$$

$$y = \frac{1}{x} \cdot K$$

VARIACE KONSTANTY

$$y = \frac{1}{x} \cdot K(x)$$

DOSAZUJI DO:

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$y' = \left[ \frac{1}{x} \cdot K(x) \right]' =$$

$$= \left( \frac{1}{x} \right)' \cdot K(x) + \frac{1}{x} \cdot \left[ K(x) \right]' =$$

$$= \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} \cdot K(x) + \frac{1}{x} \cdot K'(x) =$$

$$= \frac{-1}{x^2} \cdot K(x) + \frac{1}{x} \cdot K'(x)$$

$$-\frac{1}{x^2}\cdot K(x)+\frac{1}{x}\cdot K'(x)+\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\cdot K(x)\right]=\frac{\ln x}{x^2}$$

$$\cancel{-\frac{1}{x^2}K(x)}+\frac{1}{x}\cdot K'(x)+\cancel{\frac{1}{x^2}\cdot K(x)}=\frac{\ln x}{x^2}$$

$$\frac{1}{x}\cdot K'(x)=\frac{\ln x}{x^2}\quad / \cdot x$$

$$K'(x)=\frac{\ln x}{x^2}\cdot x$$

$$K'(x)=\frac{\ln x}{x}$$

$$K(x)=\int\frac{\ln x}{x}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{rl} \ln x & = s \\ \frac{1}{x}dx & = ds \\ dx & = \frac{ds}{\frac{1}{x}}=x\,ds \end{array}\right|=\int\frac{s}{x}\,x\,ds=\int s\,ds=\frac{s^2}{2}+C=$$

$$=\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

$$y=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{(\ln x)^2}{2}+C\right]$$

$$y=\frac{(\ln x)^2}{2x}+\frac{C}{x}$$

$$y=\frac{(\ln x)^2+2C}{2x}$$

$$y = \frac{(\ln x)^2 + 2C}{2x}$$

DOSADÍM POČÁTEČNÍ PODMÍNKU

$$\frac{1}{2} = \frac{(\ln 1)^2 + 2C}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{0 + 2C}{2}$$

$$\frac{1}{2} = C$$

$$y = \frac{\ln^2 x + 2 \cdot \frac{1}{2}}{2}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{\ln^2 x + 1}{2}}}$$

# DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

JAK TU ROVNICI POZNÁM? PŘEDPIS:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

n-tá derivace y

rovnice n-tého řádu

spojitá fce proměnné x

ROVNICE HOMOGENNÍ (NA PRAVÉ STRANĚ NULA) ŘÁDU DRUHÉHO:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

JAK SE POSTUPUJE PŘI ŘEŠENÍ ROVNIC HOMOGENNÍCH?

1. KROK: USTANOVÍM CHARAKTERISTICKOU ROVNICI

JAK VYPADÁ CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE TÉTO ROVNICE?

y NAHRADÍM POMOCÍ SUBSTITUCE MOCNINAMI NĚJAKÉHO JINÉHO KOEFICIENTU

$$\alpha^2 + a_1 \alpha^1 + a_2 \alpha^0 = 0$$

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 \cdot 1 = 0$$

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$$

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE TÉ PŮVODNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

ROVNICE JE KVADRATICKÁ, KDYŽ ŘEŠÍM KVADRATICKOU ROVNICI

JAKÉ SITUACE MOHOU NASTAT?

ROVNICE MÁ DVĚ ŘEŠENÍ REÁLNÁ $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ $\alpha_1 \neq \alpha_2$

ROVNICE MÁ JEDNO ŘEŠENÍ = JEDEN DVOJNÁSOBNÝ KOŘEN REÁLNÝ $\alpha \in R$

V REÁLNÝCH ČÍSLECH NEMÁ ŘEŠENÍ, V KOMPLEXNÍCH ČÍSLECH ŘEŠENÍ MÁ.

$\alpha_1 = a + b_i$

$\alpha_2 = a - b_i$

JSOU TO DVĚ KOMPLEXNÍ ČÍSLA SDRUŽENÝ (DVA KOMPLEXNÍ KOŘENY)

1) KDYŽ MI VYJDOU DVA REÁLNÉ KOŘENY, PRO MNE JE PODSTATNÉ, ŽE TAM MUSÍ BÝT DVĚ KONSTANTY, PROTOŽE JE TO DRUHÁ DERIVACE (DRUHÁ DERIVACE = = DVĚ KONSTANTY)

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 x} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 x}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in R$

$\alpha_1 \neq \alpha_2$

2) V PŘÍPADĚ, ŽE MI VYJDE JEDEN DVOJNÁSOBNÝ KOŘEN PROTOŽE MÁM $\alpha$ DVAKRÁT, KDYBYCH POUŽIL $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$ A VYTKL $(C_1 + C_2) \cdot e^{\alpha x}$ ALE POTŘEBUJI DVĚ RŮZNÉ LINEÁRNÍ FUNKCE,

$\alpha \in R$

CO SE TAM JEŠTĚ DÁVÁ? DO JEDNOHO ČLENU, KTERÉ JSOU STEJNÝ, SE PŘIDÁVÁ X.

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} \qquad \alpha \in R$$

PŘIDÁVÁ SE

3) KDYŽ VYJDOU DVĚ KOMPLEXNÍ ČÍSLA RŮZNÁ

$$y = C_1 e^{ax} \cdot \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

VŽDY JE TAM KLADNÉ $b$, NEŘEŠÍM ZNAMÉNKO

$\alpha_1 = a + b_i$

$\alpha_2 = a - b_i$

PŘÍKLAD $y'' - 4y' + 3y = 0$

$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{matrix} 3 = \alpha_1 \\ 1 = \alpha_2 \end{matrix}$$

POZNÁMKA:

LZE I: $(\alpha - 3)(\alpha - 1) = 0$

$\alpha - 3 = 0 \qquad \alpha - 1 = 0$

$\alpha = 3 \qquad \alpha = 1$

POZNÁMKA

$-3 \cdot (-1) = 3$ VZADU

$-3 + (-1) = -4$ UPROSTŘED

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$$

PŘÍKLAD $\boxed{y'' - 6y' + 9y = 0}$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{2} \qquad \alpha = 3$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 X e^{3x}$$

POZNÁMKA

$(\alpha - 3)(\alpha - 3) = 0$

$\alpha = 3$

$-3 \cdot (-3) = +9$ VZADU

$-3 + (-3) = -6$ UPROSTŘED

MILAN MROCZKOWSKI
SATA150@GMAIL.COM
YESIT.CZ

PŘÍKLAD

$$\boxed{y'' + 4y = 0}$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-16}}{2}$$

$D = \sqrt{-16}$ NEMÁ ŘEŠENÍ V REÁLNÝCH ČÍSLECH

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{16 i^2}}{2}$$

ŘEŠENÍ V KOMPLEXNÍCH ČÍSLECH

$i^2 = -1$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm 4i}{2} \quad \begin{cases} 2i = \lambda_1 \\ -2i = \lambda_2 \end{cases}$$

POZNÁMKA:

$\lambda_1 = a + b_i$

$\lambda_1 = 0 + 2i$

$\lambda_2 = a - b_i$

$\lambda_2 = 0 - 2i$

$a$ REÁLNÁ SLOŽKA
$b$ IMAGINÁRNÍ SLOŽKA

U $\pm b$ NEŘEŠÍM ZNAMÉNKO, VŽDY JE KLADNÉ
V SINUSU JE OBSAŽENÝ MÍNUS, PROTO NEPÍŠI MÍNUS

$$y = C_1 e^{ax} \cdot \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} \cdot \cos 2x + C_2 e^{0 \cdot x} \sin 2x$$

$$\underline{\underline{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}}$$

PŘÍKLAD $\boxed{y'' + 2y' + 2y = 0}$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4i^2}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} \quad \begin{cases} -1 + i = \alpha_1 \\ -1 - i = \alpha_2 \end{cases}$$

$$y = C_1 e^{-1x} \cos x + C_2 e^{-1x} \sin x$$

ROVNICE 3. ŘÁDU:

PŘÍKLAD: $\boxed{y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0}$

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 9\alpha - 13 = 0$

(JE TO I KUBICKÁ ROVNICE.)

ZKUS UVIDĚT KOŘEN: VIDÍM JEDEN KOŘEN MEZI ALFA JE JEDNA

$$\left[\begin{array}{r} 1^3 + 3\cdot 1^2 + 9\cdot 1 - 13 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right] \quad \underline{\alpha_1 = 1}$$

BUDEME DĚLIT POLYNOM POLYNOMEM

$$(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 9\alpha - 13) : (\alpha - 1) = \alpha^2 + 4\alpha + 13$$

$$\begin{array}{l} -\underline{(\alpha^3 - \alpha^2)} \\ \quad 4\alpha^2 + 9\alpha \\ \quad -\underline{(4\alpha^2 - 4\alpha)} \\ \qquad 13\alpha - 13 \\ \qquad -\underline{(13\alpha - 13)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

VYPOČTU KVADRATICKOU ROVNICI

$$\alpha^2 + 4\alpha + 13 = 0$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{36i^2}}{2}$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{-4 \pm 6i}{2}$$

$$-2 + 3i = \alpha_2$$

$$-2 - 3i = \alpha_3$$

VYŠLI MI 3 KOŘENY : JEDEN REÁLNÝ $\alpha_1 = 1$

DVA KOMPLEXNÍ KOŘENY $\alpha_2 = -2 + 3i$

$\alpha_3 = -2 - 3i$

JEDEN ČLEN Z 1.) VZOREČKU + DVA ČLENY Z 3.) VZOREČKU

$$y = C_3 e^{\alpha_1 x} + C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

$$y = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x + C_3 e^{1x}$$

PŘÍKLAD: $\boxed{y''' + y'' + y' + y = 0}$

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$ CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE

LZE NALÉZT KOŘENY I POMOCÍ VYTÝKÁNÍ

$$\alpha^2(\alpha+1) + 1(\alpha+1) = 0$$

$$(\alpha^2 + 1)\cdot(\alpha+1) = 0$$

$\alpha^2 + 1 = 0$

$\alpha^2 = -1$

$\alpha = \pm\sqrt{-1}$

$\alpha = \pm\sqrt{i^2}$

$\alpha = \pm i$

$\alpha_2 = i$

$\alpha_3 = -i$

$\alpha + 1 = 0$

$\alpha_1 = -1$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

TO SAMÉ JINAK:

# ŘEŠENÍ KUBICKÉ ROVNICE POMOCÍ POLYNOMU
## (UKÁZÁNÍ ŽE ŘEŠENÍ VYJDE STEJNĚ)

KOŘEN $-1$ $[-1^3+(-1)^2+(-1)^1+1=0]$

$[0=0]$

$(x-(-1))$

$(x+1)$

$$(\alpha^3+\alpha^2+\alpha^1+1):(\alpha+1)=\alpha^2+1$$

$$-(\alpha^3+\alpha^2)$$

$$\alpha^1+1$$

$$-(\alpha+1)$$

$$0$$

$$\alpha_1=-1$$

$$\alpha^2+1=0$$

ŘEŠÍM KVADRATICKOU ROVNICI

$$\alpha_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{2,3}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$\alpha_{2,3}=\frac{\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$\alpha_{2,3}=\frac{\pm\sqrt{4i^2}}{2}$$

$$\alpha_{2,3}=\frac{\pm2i}{2}\begin{cases}i=\alpha_2\\-i=\alpha_3\end{cases}$$

$$y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x$$

# METODA VARIACE KONSTANTY

PŘÍKLAD $\boxed{y'' - 3y' + 2y = e^x}$

HOMOGENNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 = \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 \end{cases}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

VARIACE KONSTANTY: $y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}$

V TOMTO PŘÍPADĚ: PROTOŽE JE TO ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU, TAK SESTAVÍM SOUSTAVU DVOU ROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH. TY NEZNÁMÉ BUDOU $C_1$ a $C_2$ I JEŠTĚ BUDOU S "ČÁRKAMA".

POTŘEBUJI SESTAVIT SOUSTAVU ROVNIC

POTŘEBUJI SESTAVIT SOUSTAVU ROVNIC

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0$$

VEZMU PRAVOU STRANU HOMOGENNÍ ROVNICE

$$C_1'(x)e^x\cdot(x)' + C_2'(x)e^{2x}\cdot(2x)' = e^x$$

— PŮVODNÍ PRAVÁ STRANA ROVNICE

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0 \quad /\cdot(-1)$$

$$C_1'(x)e^x + C_2(x)e^{2x}\cdot 2 = e^x$$

PRVNÍ ROVNICI TVOŘÍ VARIACE KONSTANTY, KTEROU POKLÁDÁM ROVNO NULE. DRUHÁ ROVNICE: OPISUJI PRVNÍ AŽ NA TO, ŽE ČLENY CO JSOU S C' DERIVUJI A NA PRAVOU STRANU POTOM DÁM PRAVOU STRANU PŮVODNÍ ROVNICE.

MÁM SOUSTAVU DVOU ROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH ($C_1'$ a $C_2'$).

$$-C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{2x} = 0$$

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x}\cdot 2 = e^x$$

$$-C_1'(x)e^x - 1(C_2'(x)e^{2x}) = 0$$

$$C_1'(x)e^x + 2(C_2'(x)e^{2x}) = e^x$$

$$0 + (-1+2)(C_2'(x)e^{2x}) = e^x$$

$$1(C_2'(x)e^{2x}) = e^x$$

$$C_2'(x)e^{2x} = e^x \quad /\cdot\frac{1}{e^{2x}}$$

$$C_2'(x) = \frac{e^x}{e^{2x}}$$

$$C_2'(x) = e^{x-2x}$$

$$C_2'(x) = e^{-x}$$

$$C_2(x) = \int e^{-x}\,dx = \left| \begin{aligned} -x &= s \\ -1dx &= ds \\ dx &= -ds \end{aligned} \right| =$$

$$= \int -e^s\,ds = -\int e^s\,ds = -e^s + C = -e^{-x} + C$$

$$C_1'(x)e^x + e^{-x} \cdot e^{2x} = 0$$

$$C_1'(x)e^x + e^{-x+2x} = 0$$

$$C_1'(x)e^x + e^x = 0 \quad / -e^x$$

$$C_1'(x)e^x = -e^x \quad /: e^x$$

$$C_1'(x) = \frac{-e^x}{e^x}$$

$$C_1'(x) = -1$$

$$C_1(x) = \int -1\,dx = -\int 1dx = -x + C$$

DOSADÍM DO VARIACE KONSTANTY

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} = -xe^x + (-e^{-x})e^{2x} =$$

$$= -xe^x + (-1)\,e^{-x+2x} =$$

$$= -xe^x - e^x$$

ŘEŠENÍ PARTIKULÁRNÍ

ŘEŠENÍ OBECNÉ = SOUČET OBECNÉ ROVNICE HOMOGENNÍ + PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ ROVNICE

$$Y = y_0 + y_P$$

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (-x e^x - e^x)$$

$$\underline{\underline{Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x - e^x}}$$

ZADÁNÍ

$$\boxed{y'' + y = 1}$$

HOMOGENNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$\alpha^2 + 1 = 1$$ CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE

$$\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{4i^2}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pm 2i}{2} \quad \begin{cases} i = \alpha_1 \\ -i = \alpha_2 \end{cases}$$

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

$$y = C_1 e^{0x} \cos 1x + C_2 e^{0x} \sin 1x$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

VARIACE KONSTANTY

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

SESTAVÍM SOUSTAVU ROVNIC

$$C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$$
$$C_1'(x)\,{-\sin x} + C_2'(x)\cos x = 1$$

POZNÁMKA DRUHOU ROVNICI SESTAVIL Z: $C_1'(x)(\cos x)' + C_2'(x)(\sin x)'$

JEDNIČKA JE Z PŮVODNÍ PRAVÉ STRANY ROVNICE

$$C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \quad / \cdot \sin x$$
$$C_1'(x)\,{-\sin x} + C_2'(x)\cos x = 1 \quad / \cdot \cos x$$

$$C_1'(x)\cos x \sin x + C_2'(x)\sin^2 x = 0$$
$$C_1'(x)\,{-\sin x}\cos x + C_2'(x)\cos^2 x = \cos x \quad / +$$

$$C_2'(x)\sin^2 x + C_2'(x)\cos^2 x = \cos x$$

VYTKNU

$$C_2'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos x$$
$$C_2'(x) \cdot 1 = \cos x$$
$$C_2'(x) = \cos x$$
$$C_2(x) = \int \cos x \, dx = \underline{\sin x + C}$$

$$C_1'(x)\cos x + \cos x \sin x = 0$$
$$C_1'(x)\cos x = -\cos x \sin x$$
$$C_1'(x) = \frac{-\cos x \sin x}{\cos x}$$
$$C_1'(x) = -\sin x$$
$$C_1(x) = \int -\sin x \, dx =$$
$$= \underline{\cos x + C}$$

DOSADÍM DO VARIACE KONSTANTY

$$y = C_1(x)\cdot\cos x + C_2(x)\sin x = \cos x\cos x + \sin x\sin x =$$
$$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$y_P = 1$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ

$$Y = y_0 + y_P$$

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x + 1$$

# DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU

PŘÍKLAD : $\boxed{y'' - 2y' = x \cdot e^x}$

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE $\quad \lambda^2 - 2\lambda = x \cdot e^x$

HOMOGENNÍ ROVNICE $\quad \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 2$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 1 + C_2 e^{2x}$$

VARIACE KONSTANTY

$$y = C_1(x) + C_2(x) e^{2x}$$

SESTAVÍM SOUSTAVU ROVNIC :

$$C_1'(x) + C_2'(x) e^{2x} = 0$$
$$C_1'(x)(1)' + C_2'(x) e^{2x} \cdot (2x)' = x \cdot e^x$$

---

$$C_1'(x) + C_2'(x) e^{2x} = 0$$
$$C_2'(x) e^{2x} \cdot 2 = x \cdot e^x$$

---

$$C_1'(x) + C_2'(x) e^{2x} = 0$$
$$C_2'(x) e^{2x} \cdot 2 = x \cdot e^x$$

---

Z DŮVODU ŽE MI JIŽ CHYBÍ $C_1'(x)$, STAČÍ MI Z DRUHÉ ROVNICE VYJÁDŘIT $C_2'(x)$

$$C_2'(x) e^{2x} \cdot 2 = x \cdot e^x$$
$$C_2'(x) = \frac{x \cdot e^x}{e^{2x} \cdot 2}$$
$$C_2'(x) = \frac{e^x}{e^{2x}} \cdot \frac{x}{2}$$
$$C_2'(x) = \left(e^{x-2x}\right) \cdot \frac{x}{2}$$
$$C_2'(x) = e^{-x} \cdot \frac{x}{2}$$
$$C_2'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{x}{2}$$
$$C_2'(x) = \frac{x}{2e^x}$$
$$C_2(x) = \int \frac{x}{2e^x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x}{e^x}\, dx = \left| \begin{matrix} u = -e^{-x} & u' = e^{-x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\left(-e^{-x} \cdot x - \int -e^{-x} \cdot 1\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-x} \cdot x + \int e^{-x}\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(-e^{-x} \cdot x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}(x+1) \cdot (-e^{-x})$$

$$\int e^{-x} dx = \left| \begin{matrix} -x = s \\ -1\,dx = ds \\ dx = -ds \end{matrix} \right| = \int -e^{s}\, ds = -\int e^{s}\, ds =$$

$$= -e^{s} + C = -e^{-x} + C$$

$$C_1'(x) + \frac{x}{2e^x} \cdot e^{2x} = 0$$

$$C_1'(x) = -\frac{x e^{2x}}{2e^x}$$

$$C_1'(x) = -\frac{x}{2} \cdot \frac{e^{2x}}{e^x}$$

$$C_1'(x) = -\frac{x}{2} \cdot \left(e^{2x-x}\right)$$

$$C_1'(x) = -\frac{x}{2} \cdot e^x$$

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x e^x$$

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} \int x e^x dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int x e^x dx = \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1\right) = -\frac{1}{2}\left(e^x \cdot x - e^x\right) = \underline{-\frac{1}{2}(x-1)e^x}$$

DOSADÍM DO VARIACE KONSTANTY

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$$
$$C_1(x) = -\frac{1}{2}(x-1)e^{x}$$

$$y = C_1(x) + C_2(x)e^{2x} =$$

$$= -\frac{1}{2}(x-1)e^{x} + \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\right]e^{2x} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)e^{x} + \left[\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{-x}\right]e^{2x} =$$

$$= -\frac{e^{x}x}{2} + \frac{e^{x}}{2} + \left[-\frac{xe^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right]e^{2x} =$$

$$= -\frac{e^{x}x}{2} + \frac{e^{x}}{2} + \left[-\frac{e^{x}x}{2} - \frac{e^{x}}{2}\right] =$$

$$= -\frac{e^{x}x}{2} + \frac{e^{x}}{2} - \frac{e^{x}x}{2} - \frac{e^{x}}{2} =$$

$$= -\frac{e^{x}x}{2} - \frac{e^{x}x}{2} = \frac{-e^{x}x - e^{x}x}{2} = \frac{2(-e^{x}x)}{2} =$$

$$= \underline{-e^{x}x}$$ PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ

OBECNÉ ŘEŠENÍ $Y = y_0 + y_P$

$$\underline{\underline{Y = C_1 1 + C_2 e^{2x} - e^{x}x}}$$

yesit.cz
sata150@gmail.com
Milan Mroczkowski
19.dubna 2015