PŘÍKLAD: $\boxed{y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}}$

ODPOVÍDÁ ROVNICI:

a) $\boxed{y' + f(x)y = g(x) \cdot y^n}$ BERNOULIHO ROVNICE

DÁM PŘÍKLAD DO TVARU BERNOULIHO ROVNICE

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y} \quad / - \frac{y}{x}$$

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}$$

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = x^2 \cdot \frac{1}{y}$$

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = x^2 \cdot y^{-1}$$

K BERNOULIHO ROVNICI PATŘÍ SUBSTITUCE VŽDY DLE TVARU:

b) $\boxed{z = y^{1-n}}$

DLE BERNOULIHO ROVNICE TATO MOCNINA n.

PROVEDU SUBSTITUCI PRO $y' - \frac{1}{x} \cdot y = x^2 \cdot \boxed{y^{-1}}$

DOSADÍM

$$z = y^{1-n}$$

$$z = y^{1-(-1)}$$

$$z = y^2$$

c) NYNÍ PROVEDU DERIVACI

$$z' = (y^2)' = 2y \cdot y'$$

A VYJÁDŘÍM y'

$$z' = 2y \cdot y'$$

$$\frac{z'}{2y} = y'$$

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = x^2 \cdot y^{-1}$$

$$\frac{z'}{2y} - \frac{1}{x} \cdot y = x^2 \cdot y^{-1} \quad / \cdot 2y$$

$$z' - \frac{1}{x} 2y^2 = 2x^2 y^{-1+1}$$

$$z' - \frac{1}{x} 2y^2 = 2x^2$$

JIŽ Z DŘÍVE PROVEDENÉ SUBSTITUCE VEZMU $z = y^2$

$$z' - \frac{1}{x} 2z = 2x^2 \qquad \text{OBECNÝ TVAR}$$

1. KROK: BUDU ŘEŠIT HOMOGENNÍ ROVNICI: (PRAVÁ STRANA SE ROVNÁ NULE)

$$z' - \frac{1}{x} \cdot 2z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot 2z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot 2z \quad / \cdot \frac{1}{2z}$$

$$\frac{1}{2z} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{2z} dz = \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{z} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|z| = \ln|x| + C \quad /\cdot 2$$

$$\ln|z| = 2\ln|x| + C$$

$$|z| = e^{2\ln|x| + C}$$

$$|z| = e^{\ln|x|^2}\cdot e^{C}$$

$$|z| = |x|^2 \cdot C$$

$$|z| = x^2 \cdot C$$

$$z = x^2 \cdot C$$

$C \in R$!

V BERNOULIHO ROVNICE

2. KROK: VARIACE KONSTANTY

$$z = x^2 \cdot C(x)$$

ZADÁNÍ PŘÍKLADU V OBECNÉM TVARU

$$z' - \frac{1}{x}2z = 2x^2$$

$$z' = \left(x^2\cdot C(x)\right)' = (x^2)'\cdot C(x) + x^2\cdot\left(C(x)\right)' =$$

$$= 2x\cdot C(x) + x^2\cdot C'(x)$$

$$2x\cdot C(x) + x^2\cdot C'(x) - \frac{1}{x}2\left[x^2\cdot C(x)\right] = 2x^2$$

$$2x\cdot C(x) + x^2\cdot C'(x) - \frac{2x^2C(x)}{x} = 2x^2$$

$$\cancel{2x\cdot C(x)} + x^2\cdot C'(x) \cancel{- 2xC(x)} = 2x^2$$

$$x^2\cdot C'(x) = 2x^2 \quad /\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$C'(x) = 2$$

$$C(x) = \int 2\,dx$$

$$C(x) = 2x + K$$

DOSADÍM "DO TVARU" VARIACE KONSTANTY

$$z = x^2 \cdot C(x)$$

$$z = x^2 \cdot (2x + k)$$

DŘÍV JSEM SUBSTITUOVAL $z = y^2$

ZAJÍMÁ MNE FUNKCE y.

$\sqrt{z} = y$

$$y = \pm\left[\sqrt{x^2 \cdot (2x + k)}\right]$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ

PŘÍKLAD:

$$\boxed{x \cdot y' - 4y = x \cdot \sqrt{y}}$$

BERNOULIHO ROVNICE $\quad y' + f(x)y = g(x) \cdot y^n$

POKUD SI ŘEKNU, ŽE $x \neq 0$ (JE RŮZNÝ OD NULY), TAK JI MŮŽEME VYDĚLIT.

$$x \neq 0$$

$$x \cdot y' - 4y = x \cdot \sqrt{y} \quad /:x$$

$$y' - \frac{4y}{x} = y^{\frac{1}{2}}$$

SUBSTITUCE $\underline{z = y^{1-n}}$

$$z = y^{1-\frac{1}{2}}$$

$$z = y^{\frac{1}{2}}$$

DERIVACE $\underline{z' = (y^{\frac{1}{2}})'} = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} \cdot y' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$

$$z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' \quad /: \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

VYJÁDŘENÍ y' $\quad \frac{z'}{\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}} = \underline{y'}$

$$\frac{z'}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}}} = y'$$

$$\frac{z'}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} = y'$$

$$2z'\sqrt{y} = y'$$

$$2z'\sqrt{y} - \frac{4y}{x} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$2z'\sqrt{y} - \frac{4}{x}y = \sqrt{y}$$

V SUBSTITUCI VYŠLO $z = y^{\frac{1}{2}}$

$$2z'\sqrt{y} - \frac{4}{x}y = z \quad / \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$y \neq 0$

$$z' - \frac{4}{2x}\frac{y}{\sqrt{y}} = z \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$z' - \frac{2}{x}y^{1-\frac{1}{2}} = z \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$z' - \frac{2}{x}\sqrt{y} = z \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

V SUBSTITUCI VYŠLO $z = y^{\frac{1}{2}}$

$$z' - \frac{2}{x}z = z \cdot \frac{1}{2z}$$

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{1}{2}$$

OBECNÝ TVAR (ROVNICE 1. RÁDU)

HOMOGENNÍ ROVNICE: $z' - \frac{2}{x} z = 0 \quad \Big/ + \frac{2}{x} z$

$$z' = \frac{2}{x} z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} z \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2z} \qquad z \neq 0$$

$$\frac{dz}{2z} \frac{1}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Big/ \cdot dx$$

$$\frac{dz}{2z} = \frac{1}{x} dx \quad \Big/ \cdot 2$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{2}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{z} dz = 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|z| + A = 2 \ln|x| + B$$

$$\ln|z| = 2 \ln|x| + B - A$$

$$\ln|z| = 2 \ln|x| + C$$

$$|z| = e^{2 \ln|x| + C}$$

$$|z| = e^{\ln|x|^2} \cdot e^C$$

$$|z| = |x|^2 \cdot D$$

$$z = x^2 \cdot K$$

VARIACE KONSTANTY: $\quad z = x^2 \cdot k(x)$

DOSAZUJI DO: OBECNÉHO TVARU

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{1}{2}$$

$$z' = [x^2 \cdot k(x)]' = (x^2)' \cdot k(x) + x^2 \cdot [k(x)]' =$$
$$= 2x \cdot k(x) + x^2 \cdot k'(x)$$

$$2x \cdot k(x) + x^2 \cdot k'(x) - \frac{2}{x} x^2 k(x) = \frac{1}{2}$$

$$2x\, k(x) + x^2 \cdot k'(x) - 2x\, k(x) = \frac{1}{2}$$

$$x^2 \cdot k'(x) = \frac{1}{2} \quad / \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$k'(x) = \frac{1}{2x^2}$$

$$k(x) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$k(x) = \frac{1}{2} \int x^{-2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + C$$

DOSADÍM DO VARIACE KONSTANTY:

$$z = x^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) + C \right]$$

V SUBSTITUCI VYŠLO: $z = y^{\frac{1}{2}}$

$$y^{\frac{1}{2}} = x^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) + C \right] \quad /^2$$

$$y^{\frac{2}{2}} = \left(x^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) + C \right] \right)^2$$

$$y = \left(x^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) + C \right] \right)^2$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ,
PROTOŽE JE TADY
KONSTANTA.

MÁM $y=0$

KOUKNU NA OBECNÝ TVAR (OBECNÝ TVAR JE I VÝSLEDEK HOMOGENNÍ ROVNICE)

$$z = x^2 \cdot K$$

JE PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ ? PRO $y=0$

1. MUSÍ MÍT KONSTANTU má K
   ZA KTERÉ DOSAZUJI LIBOVOLNÉ REÁLNÉ ČÍSLO, PRO ZÍSKÁNÍ ŘEŠENÍ DOSAZUJI NULU.

2. MUSÍ JÍT y DOSADIT nejde

3. DOSTAT VÝSLEDEK $0=0$

$\boxed{y=0 \text{ NENÍ PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ}}$

JE VÝJIMEČNÉ ŘEŠENÍ ? PRO $y=0$

1. NESMÍ JÍT ZÍSKAT ŘEŠENÍ Z OBECNÉHO TVARU $0=0$ splněno

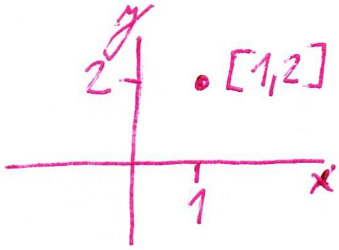
2. ŘEŠENÍ $0=0$ DOSTANU DOSAZENÍM splněno
   DO ZADÁNÍ $\underbrace{x \cdot 0' - 4 \cdot 0}_{0} = \underbrace{x \cdot \sqrt{0}}_{0}$

$\boxed{y=0 \text{ JE PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ}}$

ŘEŠENÍM VE OBECNÉ ŘEŠENÍ
A JEDNO VÝJIMEČNÉ ŘEŠENÍ.

ÚLOHY S POČÁTEČNÍ PODMÍNKOU
(CAUCHYHO ÚLOHY)

ZADÁNÍ
$$\boxed{\begin{aligned} y' &= 2x \\ \underbrace{y(1)=2}_{\text{PODMÍNKA}} \end{aligned}}$$



$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

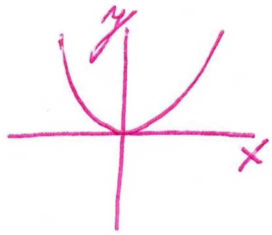
$$\int dy = \int 2x\, dx$$

$$\int 1\, dy = 2\int x\, dx$$

$$y = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ $\quad y = x^2 + C$

JE TO PARABOLA



DOSADÍM PODMÍNKU, ABYCH VYJÁDŘIL KONSTANTU

$$2 = 1^2 + C \quad /-1$$

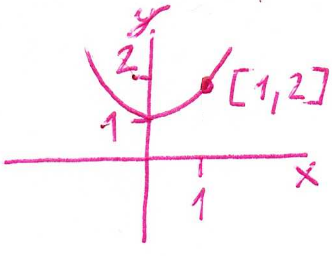
$$1 = C$$

VÝSLEDEK:

$$\underline{\underline{y = x^2 + 1}}$$

PARABOLA POSUNUTA O JEDNIČKU NAHORU

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ



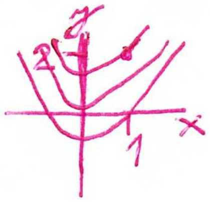
V PŘÍKLADU BYLO: PTÁM SE, DERIVACE ČEHO SE ROVNÁ $2x$?

ZADÁNÍ: $y' = 2x$ ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

VZOREC: $y' = p(x) \cdot q(y)$

V ZADÁNÍ MI CHYBÍ y, TUDÍŽ STAČÍ INTEGRACE

POKUD ŘEŠENÍ MÁ KONSTANTU, TAK JE TO OBECNÉ ŘEŠENÍ, DÍKY KONSTANTĚ DOSTANU NEKONEČNĚ MNOHO KONKRÉTNÍCH KŘIVEK, NAPŘ:



JAKOU KONSTANTU C MUSÍM ZVOLIT, ABY TA KŘIVKA KTEROU DOSTANU PROCHÁZELA BODEM [1, 2], NEBO-LI FUNKČNÍ HODNOTA V BODĚ JEDNA BYLA DVOJKA?

CHCI NAJÍT NĚJAKOU FUNKCI, KTERÁ ŘEŠÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI A ZÁROVEŇ PROCHÁZÍ BODEM [1, 2].

VÍM, ŽE ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC JE MNOŽINA NĚJAKÝCH PROMĚNNÝCH, KTERÝCH JE NEKONEČNĚ MNOHO.

POTŘEBUJI Z TÉ MNOŽINY VYBRAT JEDNU ČI VÍCE FUNKCÍ, KTERÉ PROCHÁZEJÍ BODEM [1, 2].

ZADÁNÍ ROVNICE

$$\boxed{\begin{gathered} y' + 2\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = 1 \end{gathered}}$$

POČÁTEČNÍ PODMÍNKA

[JE TO ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

$$y' = p(x) \cdot q(y)$$
]

$$y' + 2\sqrt{y} = 0 \quad x \quad y \quad / -2\sqrt{y}$$

$$y' = -2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\sqrt{y} \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \qquad y \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = -2 \quad / \cdot dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} dy = -2 dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = -2 \int dx$$

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + A = -2x + B$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2x + B - A$$

$$2\sqrt{y} = -2x + C$$

$$\sqrt{y} = \frac{-2x + C}{2} \quad /^2$$

$$y = \left(\frac{-2x + C}{2}\right)^2$$

$$y = \left(\frac{-2x}{2} + \frac{C}{2}\right)^2$$

$$y = \left(-x + \frac{C}{2}\right)^2$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ $\underline{y = (-x + C)^2}$

OBECNÉ ŘEŠENÍ $y=(-x+C)^2$

DOSADÍM PODMÍNKU

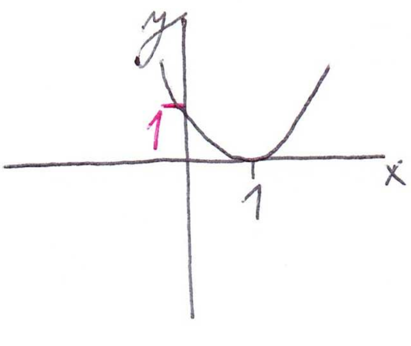
$$1=(-0+C)^2$$
$$1=C^2$$
$$\pm\sqrt{1}=C$$
$$\pm 1=C$$

DVĚ PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ

$$\left.\begin{aligned} y&=(-x+1)^2 \\ y&=(-x-1)^2 \end{aligned}\right\} \text{VÝSLEDEK}$$

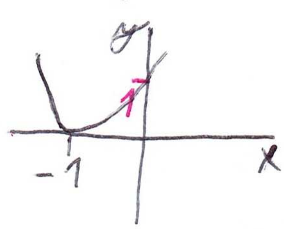
CO JE GRAFEM JEDNOTLIVÝCH PARTIKULÁRNÍCH ŘEŠENÍ? JSOU TO PARABOLY, KTERÉ SE POSOUVAJÍ PO OSE X V ZÁVISLOSTI NA C.

$$y=(-x+1)^2$$
$$(-(x-1))^2$$
$$(-1(x-1))^2$$
$$(-1^2(x-1)^2)$$
$$1(x-1)^2$$
$$(x-1)^2 \qquad x-1=0 \quad /+1$$
$$x=1$$



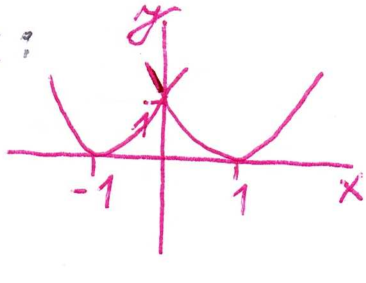
PODMÍNKA
$y(0)=1$

$$y=(-x-1)^2$$
$$(-1(x+1))^2$$
$$(-1^2(x+1)^2)$$
$$1(x+1)^2$$
$$(x+1)^2 \qquad x+1=0 \quad /-1$$
$$x=-1$$



PODMÍNKA
$y(0)=1$

VÝSLEDEK:



K ČEMU JE DOBRÉ ŘEŠIT DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S POČÁTEČNÍ PODMÍNKOU?

POPSÁNÍ CHOVÁNÍ V PŘÍRODĚ: CHOD SRÁŽEK - MODELY POČASÍ: KOLIK SRÁŽEK KDE SPADNE, MUSÍM VĚDĚT POČÁTEČNÍ PODMÍNKY: KOLIK JICH BUDE PŘIBLIŽNĚ PADAT

LZE PŘEDPOVÍDAT CHOVÁNÍ NA FINANČNÍCH TRZÍCH

KOLIK PENĚZ ZA ROK TAM BUDU MÍT, KDYŽ TAM VLOŽÍM 10 000, JINAK TO BUDE VYPADAT KDYŽ VLOŽÍM MILION, TO JE POČÁTEČNÍ PODMÍNKA. PŘEDPOVÍDÁM PODLE POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

ZADÁNÍ ROVNICE

$$\boxed{\begin{array}{l} y' + 2\sqrt{y} = 0 \\ y(3) = 0 \end{array}}$$ POČÁTEČNÍ PODMÍNKA

ZADÁNÍ PODOBNÉ PŘEDCHOZÍMU ZADÁNÍ,

OBECNÉ ŘEŠENÍ: $y = (-x + C)^2$

DOSADÍM PODMÍNKU

$$0 = (-3 + C)^2$$

! POZOR

ČEMU SE ROVNÁ C ?

$$C = 3$$

PROTOŽE $\left[\begin{array}{l} 0 = (-3+3)^2 \\ 0 = 0^2 \\ 0 = 0 \end{array}\right]$

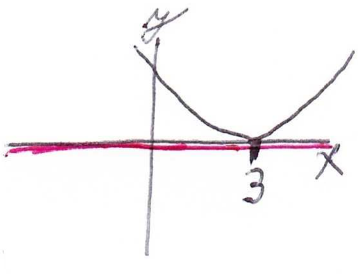
$y = (-x + 3)^2$ PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ

$(-1(x-3))^2$

$(-1^2(x-3)^2)$

$(x-3)^2$ $\quad x - 3 = 0 \quad /+3$

$x = 3$



$\underline{y = 0}$ VÝJIMEČNÉ ŘEŠENÍ PROTOŽE

[$(0' + 2\sqrt{0} = 0)$ A NEDOSTANU ŘEŠENÍ DOSAZENÍM $y = 0$ DO OBECNÉHO ŘEŠENÍ.]

Milan Mroczkowski
sata150@gmail.com
yesit.cz