

METODY ŘEŠENÍ DIFERENCIALNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU.

- DIFERENCIALNÍ ROVNICE SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI.

CO TO JE? JAK TO POZNAŤ?

UMOŽŇUVÍ DAŤ NA JEDNU STRANU VŠECHNY x A NA DRUHOU STRANU VŠECHNY y .

ROVNICE JE VE TVARU:

$$y' = p(x) \cdot q(y)$$

VŽDY MUSÍ BÝT SCHOPNA NA JEDNU STRANU ROVNICE DOSTAT DERIVACI TĚ FUNKCE y , A NA DRUHOU STRANU SOUČIN DVOU FUNKCÍ.

JEDNA TA FUNKCE BUDE POUZE FUNKCE (TA PĚČKOVÁ FUNKCE PROMĚNNÉ x)

BUDE NÁŠOBIT NĚJAKOU FUNKCÍ, DEJME TOMU $q(y)$ KTERÁ SAMA O SOBĚ BUDE PROMĚNNÁ y .

$$\text{VZOREC } y' = p(x) \cdot q(y)$$

PRÍKLAD: $y' = x \cdot y$

JAK SE TYTO ROVNICE ŘEŠÍ?

JESTLIŽE TA ROVNICE MÁ SEPAROVANÉ PROMĚNNÉ,
TAK TA SEPARACE V PODSTATĚ ZNAMENÁ TO, ŽE JSME
SCHOPNI DÁT NA JEDNU STRANU ROVNICE VŠE CO OBSAHUJE
 x , NA DRUHOU STRANU VŠE CO OBSAHUJE y A POTOM
TO BUDEME INTEGROVAT. JEŠTĚ MUSÍM ZAPSAT JINAK y' ,
A TO JAK? $\frac{dy}{dx}$. CO TO JE $\frac{dy}{dx}$? DERIVACE y PODLE
PROMĚNNÉ x .

KDYŽ ŘEŠÍM DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI, TAK SE PTÁM,
JAK VYPADÁ TA FUNKCE y ? TA FUNKCE y OBECNĚ
PŘEDPOKLÁDÁ ŽE JE NĚJAKÉ PROMĚNNÉ x , TO ZNAMENÁ,
JAKOBY TA DERIVACE ZASE MUSÍ BĚŽET PODLE TĚ
PROMĚNNÉ x .

POKRAČUJI V PŘÍKLADU: $y' = x \cdot y$

VZOREC: $y' = p(x) \cdot q(y)$

DÁT VŠE CO OBSAHUJE y
NA JEDNU STRANU A CO
OBSAHUJE x NA DRUHOU
STRANU.

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y \quad | \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{y} \cdot \frac{1}{dx} = x \quad | \cdot dx$$

↓
ZA PODMÍNKY
 $y \neq 0$

NYNÍ BUDU OBĚ
STRANY INTEGROVAT

$$\frac{dy}{y} = x \, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \, dx$$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int x \, dx$$

NA PRAVÉ STRANĚ
DOSTANU TAKÉ
KONSTANTU, KTERÁ
JE ODLIŠNÁ OD TĚ
VLEVO, NAZVU JI
NAPŘÍKLAD "Z".

$$\ln|y| + C = \frac{x^2}{2} + Z$$

CO SE UDEĚLÁ S TĚMI KONSTANTAMA?
ROZDÍL DVOU ČÍSEL JE ZASE ČÍSLO,
TUDÍŽ ZASE NĚJAKÁ KONSTANTA.

KONSTANTU DÁM
NA PRAVOU STRANU,
PROTOŽE CHCI OSAMOSTATNIT
 y .

$$\ln|y| + C = \frac{x^2}{2} + Z \quad | -C$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + Z - C$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + a$$

VZNIKLA: PLUS
NĚJAKÁ MENŠÍ
KONSTANTA.

TOHLE JE UŽ ŘEŠENÍ NAŠÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE.
JDE O IMPLICITNÍ VYJÁDRĚNÍ, TEDY, NENÍ VYJÁDRĚNÁ
TA PROMĚNNÁ y . ALE, JÁ CHCI OSAMOSTATNIT PROMĚNNOU y ,
PROVEDU ODLOGARITMOVÁNÍM.

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + a$$

VÍM, ŽE EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE S FUNKCÍ LOGARITMICKOU JE FUNKCE INVERZNÍ.

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + a}$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^a$$

CO JE TO e NA a ? JE VŽDY ČÍSLO KLADNÉ, JE VŽDY NAD OSOU X.



e JE KONSTANTA, KONSTANTA NA KONSTANTU JE KONSTANTA.

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot b$$

MUTNÁ POZNÁMKA:
 $b > 0$

y SE V ABSOLUTNÍ HODNOTĚ MŮŽE ROVNAT:
KDYŽ ODSTRANÍM ABSOLUTNÍ HODNOTU, TAK MUSÍM PŘIPUSTIT SITUACI, ŽE TA KONSTANTA BUDE ZÁPORNÁ, TUDÍŽ TO "P" JE REÁLNÉ ČÍSLO KROMĚ NULY.
TÍM MÁM OBECNÉ ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE.

$$\underline{y = P \cdot e^{\frac{x^2}{2}}} \quad P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

POZNÁMKA:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} |y|$$

$$\# y = -e^{\frac{x^2}{2}} \cdot b$$

PO VYNAŠOVENÍ -1 DOSADÍM ZÁPORNÉ ČÍSLO, ABYCH DOSTAL VÝSLEDEK Z ABSOLUTNÍ HODNOTY.

NEMOHLI BYCHOM SI TAM DOSADIT I NULU?

Z e^a NÁM VYSĚLO, ŽE KONSTANTA JE KLADNÁ,

KDYŽ JSME ODSTRANŮVALI ABSOLUTNÍ HODNOTU Z y ,

TAK MI VYSĚLO, ŽE KONSTANTA MŮŽE BÝT I ZÁPORNÁ.

TEĎ BY MNE ZAJÍMALO, JAK JE TO S TOU NULOU?

KDE MI VYSĚLO ŽE y SE NESMÍ ROVNAT NULE? ZDE:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y \quad | \cdot \frac{1}{y} \quad y \neq 0$$

CO SE STANE, KDYŽ TO y BUDE NULA?

NEŠEL BY POUŽÍT TENTO POSTUP, ALE KDYŽ

TAM $y = 0$ DOSADÍM, TAK CO DOSTANU?

$$0 = 0$$

KDYŽ TAM DOSADÍM NĚCO A ROVNICE SE ROVNÁ: $0 = 0$ NEBO-LI LEVÁ STRANA SE ROVNÁ PRAVÉ STRANĚ

$L = P$ JSME POUŽÍVALI PŘI ZKOUŠCE. \Rightarrow JE TO ŘEŠENÍ DIFERENCIALNÍ ROVNICE.

\rightarrow ZJISTIL JSEM, ŽE $y = 0$ JE TAKÉ ŘEŠENÍ, MOHU HO DOSTAT Z OBECNĚHO ŘEŠENÍ?

JE TO
JEDNO ŘEŠENÍ
NAVÍC

DAŤ DOHROMADY:

$$y \neq 0 \quad y = P \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad y = 0$$

$P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$y = P \cdot e^{\frac{x^2}{2}}, \quad P \in \mathbb{R}$$

ŘEŠENÍ OBSAHUJE
KONSTANTU - OBECNĚ
ŘEŠENÍ

ZNÁME ŘEŠENÍ: OBEČNÉ $y = P \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, $P \in \mathbb{R}$
PARTIKULÁRNÍ (ČÁSTEČNÝ)

PŘÍKLADY:

$$\left. \begin{aligned} y &= 2 e^{\frac{x^2}{2}} \\ y &= 3 e^{\frac{x^2}{2}} \\ y &= 0 e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned} \right\}$$

TOTO VŠE JSOU PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ, JSOU TOTY
ŘEŠENÍ, KTERÉ DOSTANU DOSAZENÍM
ZA KONSTANTU P JAKÉHOKOLIV REÁLNÉHO
ČÍSLA.

VÝJIMEČNÉ - právě nedostanu
volbou konstanty P .
TÍM PÁDEM NELZE HO ZÍSKAT
Z OBEČNÉHO ŘEŠENÍ

PŘÍKLAD: $y' = \sqrt[3]{y^2}$ NAJDI OBECNÉ ŘEŠENÍ

JE TOTO ROVNICE SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI?
FUNKCE PROMĚNNÉ x JE TADY SCHOVANÁ,
PROTOŽE JE KONSTANTNÍ A JE TO JEDNIČKA,
(NE x JE JEDNIČKA), ALE TA FUNKCE PROMĚNNÉ x
JE JEDNIČKA.

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}} \quad / \cdot \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{dx} dy = y^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} \quad / \cdot dx \quad y \neq 0$$

$$\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} dy = 1 dx$$

$$y^{-\frac{2}{3}} dy = 1 dx$$

$$\int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int 1 dx$$

$$\frac{y^{-\frac{2}{3} + \frac{1}{1}}}{-\frac{2}{3} + \frac{1}{1}} + C = x + K \quad / -C$$

$$\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = x + K - C \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x + a \quad / \sqrt[3]{\quad}$$

$$y = \left(\frac{1}{3} x + a\right)^3 \quad \text{OBECNÉ ŘEŠENÍ}$$

VYJÁDRĚM
 y

CO SE STANE, KDYŽ y BUDE ROVNO NULE?

UDELAJ ZKOUŠKU:

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

$$0 = \sqrt[3]{0^2}$$

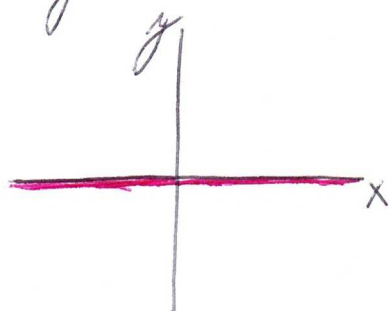
$$0 = 0$$

ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE JE $y = 0$.
POKUD ŘEŠENÍ DOSTANU Z OBECNÉHO ŘEŠENÍ,
JDE O PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ.

POKUD ŘEŠENÍ NEDOSTANU Z TOHO OBECNÉHO ŘEŠENÍ,
JDE O VÝJIMEČNÉ ŘEŠENÍ.

JDE O VÝJIMEČNÉ ŘEŠENÍ

$y = 0$ TO JE CO?



KDYŽ ŘEKNU ŽE A CHCI ABY BYLA NULA, TAK

KRESLÍM $(\frac{1}{3}x + a)^3$

$$(\frac{1}{3}x + 0)^3$$

$$(\frac{x^3}{3^3})$$

$\frac{x^3}{27}$ COŽ JE KUBICKÁ PARABOLA POSOUVÁ SE PO OSE X



KDYBYCH DO OBECNÉHO ŘEŠENÍ DOSAZOVAL KONSTANTU
DOSTÁVÁM PARTIKULÁRNÍ, TAK JSOU TO VŽDY TYTO FUNKCE
RŮZNĚ POSUNUTÉ PO OSE X, ALE VÝJIMEČNÉ ŘEŠENÍ
JE TA ČERVENĚ OZNAČENÁ PŘÍMKA, COŽ VYPADÁ ÚPLNĚ
JINAK NEŽ PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ.

PRÍKLAD :

$$(y - \sin x) y' = \frac{y}{x} (y - \sin x)$$

$$(y - \sin x) y' = \frac{y}{x} (y - \sin x)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ x \neq 0 & y \neq \sin x \end{array}$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad | \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad | \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln |y| + A = \ln |x| + B \quad | -A$$

$$\ln |y| = \ln |x| + B - A$$

$$\ln |y| = \ln |x| + C$$

$$|y| = e^{\ln |x| + C}$$

$$|y| = e^{\ln |x|} \cdot e^C$$

$$|y| = e^{\ln |x|} \cdot D \quad D \in \mathbb{R}^+$$

POZNÁMKA:
A a B JE
KONSTANTA

$$\boxed{\text{VÍME: } e^{\ln x} = x}$$

$$\boxed{e^{\ln|x|} = |x|}$$

OBEČNÉ
ŘEŠENÍ
DIFERENCIALNÍ
ROVNICE

$$y = |x| \cdot P \quad P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

↑

ODSTRANĚNÍM ABSOLUTNÍ HODNOTY
MŮŽE BÝT KONSTANTA, NAZVU "P",
KLADNÁ NEBO ZÁPORNÁ

CO SE STANE, KDYŽ $y = 0$?

$$\text{PROTOŽE } (y - \sin x) \cdot 0 = 0$$

$y = 0$ JE ŘEŠENÍM DIFERENCIALNÍ ROVNICE

BUDE TO ŘEŠENÍ VÝJIMEČNÝ NEBO POUZE PARTIKULÁRNÍ?

KDYŽ VEZMU $P \cdot |x|$, TAK KDYŽ TU PODMÍNKU
ROZŠÍŘÍM O NULU: $P \in \mathbb{R}$.

$y = 0$ JE PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ

CO SE STANE, KDYŽ $y = \sin x$?

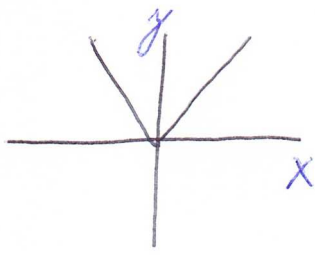
$$(\sin x - \sin x) y' = \frac{0}{x} (\sin x - \sin x)$$

$$0 = 0$$

$y = \sin x$ JE VÝJIMEČNÉ ŘEŠENÍ, protože:

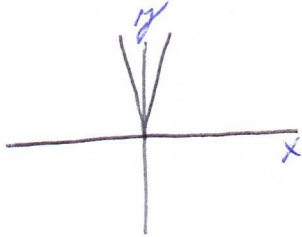
~~$|\sin x|$~~ Z ABSOLUTNÍ HODNOTY
SINUS NEUDĚLÁM

$|x|$



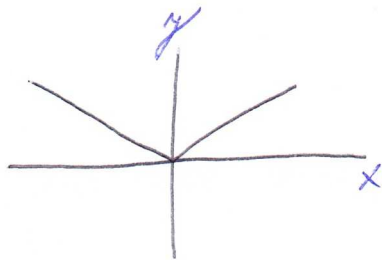
Poznámka: věčko

$\|x\|$



Poznámka: musí se
věčko
2x ABSOLUTNÍ
HODNOTA Z x

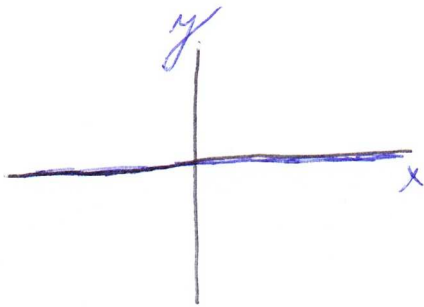
$\left\| \frac{1}{2}x \right\|$



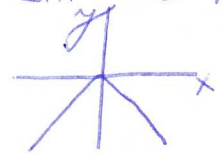
Poznámka: ROZŠÍŘÍ SE
VĚČKO

JAKÉ DALŠÍ FUNKCE PATŘÍ DO TĚ V P. |x|
SKUPINY

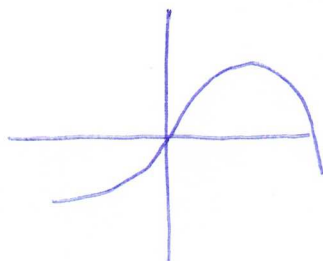
$P=0$



ČI ZÁPORNÉ ATD.



$\sin x$ VYPADÁ JINAK NEŽ ŘEŠENÍ ZÍSKANÉ Z OBECNĚHO
ŘEŠENÍ (ÚPLNĚ JINAK) \Rightarrow VÝJIMEČNĚ ŘEŠENÍ



• LINEÁRNÍ DIFERENCIALNÍ ROVNICE
1. ŘÁDU

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

PŘÍKLAD: $y' - \frac{2}{x+1} \cdot y = (x+1)^3$

1) NAHRADÍM
PRAVOU STRANU
NULOU

$$y' - \frac{2}{x+1} \cdot y = 0 \quad \begin{array}{l} \text{HOMOGENNÍ} \\ \text{ROVNICE} \\ y \neq 0 \end{array}$$

A ŘEŠÍM

DIFERENCIALNÍ ROVNICI SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI

$$y' = \frac{2}{x+1} \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x+1} \cdot y \quad | \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{y \, dx} = \frac{2}{x+1} \quad | \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{2}{x+1} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x+1} dx$$

$$\ln|y| + A = 2 \ln|x+1| + B \quad | -A$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x+1| + B - A$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x+1| + C$$

$$\ln |y| = 2 \ln |x+1| + C$$

$$|y| = e^{2 \ln |x+1| + C}$$

$$|y| = e^{2 \ln |x+1|} \cdot e^C$$

$$|y| = e^{2 \ln |x+1|} \cdot D$$

$$|y| = e^{\ln |x+1|^2} \cdot D$$

$$|y| = |x+1|^2 \cdot D$$

POZNÁMKA
 $e^{\ln x} = x$
 $e^{\ln |x|} = |x|$

JAKÁ JE TA KONSTANTA "D" ? ČÍSLO KLADNÉ. KDYŽ SE
CHCI ZBAVIT ABSOLUTNÍ HODNOTY U KLONU, TAK
POVOLÍME ABY TA KONSTANTA BYLA I ZÁPORNÁ,
TEĎ JE TA KONSTANTA KLADNÁ I ZÁPORNÁ.

$$y = |x+1|^2 \cdot E$$

JELIKOŽ JE ZDE NA DRUHOU, TAK
VŽDY BUDE KLADNÉ, TEDY STAČÍ
DÁT KULATOU ZÁVORKU

$$y = (x+1)^2 \cdot E$$

ČO BY SE STALO, KDYBY $y=0$ DOSADIL DO HOMOGENNÍ
ROVNICE ?

$$0=0$$

TEĎ, $y=0$ JE ŘEŠENÍM, JAKÝM? KDYŽ DOSADÍM:

$$y = |x+1|^2 \cdot E$$

$$y=0$$

↑
KDYŽ ZA E DÁM NULU.

$$2(x+1) \cdot E(x) + (x+1)^2 \cdot E'(x) - \frac{2}{x+1} \cdot (x+1)^2 \cdot E(x) = (x+1)^3$$

$$\cancel{2(x+1) \cdot E(x)} + (x+1)^2 \cdot E'(x) - \cancel{2(x+1) \cdot E(x)} = (x+1)^3$$

$$(x+1)^2 \cdot E'(x) = (x+1)^3$$

$$E'(x) = (x+1)$$

$$E(x) = \int (x+1) dx$$

$$E(x) = \frac{x^2}{2} + x + F$$

$$y = (x+1)^2 \cdot E(x)$$

$$\underline{y = (x+1)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x + F\right)}$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ
DIFERENCIÁLNÍ
ROVNICE

1. KROK: ŘEŠÍM HOMOGENNÍ ROVNICI SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI \Rightarrow OBECNÉ ŘEŠENÍ

2. KROK: PROVEDU VARIACI KONSTANTY, ŘEKNU ŽE KONSTANTA NENÍ REÁLNÉ ČÍSLO, ALE JE TO NĚJAKÁ FUNKCE, POTOM SE PTÁM: JAK TATO FUNKCE MUSÍ VYPADAT? (VIZ VÝŠE)
(VÝSLEDEK)

PŘÍKLAD:

$$y' + 2y - e^{3x} = 0$$

OBECNÝ TVAR:

$$y' + 2 \cdot y = e^{3x}$$
$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

$$y' + 2y = e^{3x}$$

V NAŠEM PŘÍPADĚ
TO $p(x)$ JE FUNKCE
KONSTANTNÍ JE TO
DVOJKA

$$(y' + \text{NĚJAKÁ FUNKCE PROTIĚMNĚ } \cdot y) = \text{POUZE NĚCO CO OBSAHUJE } x$$

1) ŘEŠÍM HOMOGENNÍ ROVNICI,
TEDY e^{3x} SI ODMYSLÍM

$$y' + 2y = 0$$

$$y' = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y \quad | \cdot \frac{1}{y} \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y dx} = -2 \quad | \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} dy = -2 dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -2 \int dx$$

$$\ln |y| = -2x + C$$

$$|y| = e^{-2x+C}$$

VŠECHNY

$$|y| = e^{-2x} \cdot e^C$$

KONSTANTY

JEŠTE SE ROZHODL

$$|y| = e^{-2x} \cdot C$$

OZNAČOVAT

STEJNĚ, PÍSMENEM

$$y = e^{-2x} \cdot C$$

C.

PROVEDU VARIACI KONSTANTY

$$y = e^{-2x} \cdot C(x)$$

OBEČNÝ TVAR ZADANÉHO PŘÍKLADU $y' + 2y = e^{3x}$

↑
ZJIŠTI

$$y' = [e^{-2x} \cdot C(x)]' =$$

$$= (e^{-2x})' \cdot C(x) + e^{-2x} \cdot C'(x) =$$

$$= e^{-2x} \cdot (-2x)' \cdot C(x) + e^{-2x} \cdot C'(x) =$$

$$= e^{-2x} \cdot (-2) \cdot C(x) + e^{-2x} \cdot C'(x)$$

DOSADÍM DO ZADANÉHO PŘÍKLADU:

$$e^{-2x} \cdot (-2) \cdot C(x) + e^{-2x} \cdot C'(x) + 2[e^{-2x} \cdot C(x)] = e^{3x}$$

$$-2[e^{-2x} \cdot C(x)] + e^{-2x} \cdot C'(x) + 2[e^{-2x} \cdot C(x)] = e^{3x}$$

$$e^{-2x} \cdot C'(x) = e^{3x} \quad | : \frac{1}{e^{2x}}$$

$$C'(x) = e^{3x} \cdot e^{2x}$$

$$C'(x) = e^{5x}$$

$$C(x) = \int e^{5x} dx \neq$$

$$\int e^{5x} dx = \left| \begin{array}{l} 5x = s \\ 5 dx = ds \\ dx = \frac{ds}{5} \end{array} \right| = \int e^s \cdot \frac{ds}{5} = \frac{1}{5} \int e^s ds =$$
$$= \frac{1}{5} e^s + C = \frac{1}{5} e^{5x} + D$$

$$C(x) = \frac{1}{5} e^{5x} + D$$

DOSADÍM DO $y = e^{-2x} \cdot C$

$$y = e^{-2x} \cdot \left(\frac{1}{5} e^{5x} + D \right)$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ ROVNICE