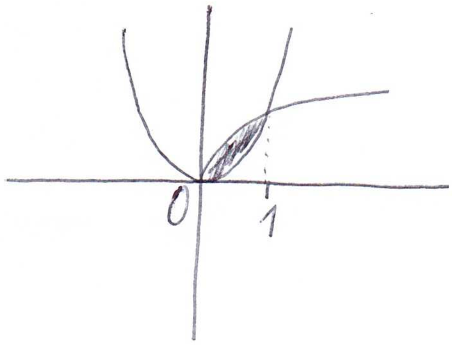
PŘÍKLAD:

VYPOČTĚTE OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA, KTERÉ VZNIKNE ROTACÍ ROVINNÉHO OBRAZCE OHRANIČENÉHO KŘIVKAMI $y=x^2$ A $y^2=x$ KOLEM OSY x.

$$y = x^2$$
$$y^2 = x \Rightarrow \sqrt{x}$$



$$x^2 = \sqrt{x}$$
$$1^2 = \sqrt{1}$$
$$1 = 1$$

$$\boxed{\text{VZOREC} \quad V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \text{FUNKCE NA DRUHOU}}$$

$$\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x \, dx - \pi \int_0^1 x^4 \, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 =$$

$$= \pi \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] - \pi \left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi - 2\pi}{10} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{10} j^3}}$$

$(e^x)'$

$$\int e^x \cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$\int \cos x$ VÝSLEDEK DERIVACE

$$= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x\,dx =$$

$$= e^x \cdot \sin x - \left| \begin{matrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \cdot \sin x - \left[e^x \cdot (-\cos x) - \int e^x \cdot (-\cos x)\,dx \right] =$$

$$= e^x \cdot \sin x - \left[e^x \cdot (-\cos x) + \int e^x \cos x\,dx \right] =$$

$$= e^x \cdot \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{\text{STEJNÉ JAKO ZADÁNÍ}}$$

$$\overbrace{\int e^x \cos x\,dx}^{\text{ZE ZADÁNÍ OPÍŠI}} = e^x \cdot \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx \qquad \Big/ + \int e^x \cos x\,dx$$

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \cdot \sin x + e^x \cos x \qquad \Big/ : 2$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \cdot \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin(x) + \cos(x) \right) + C$$

$$\int \frac{4x^2-x-15}{(x-4)(x-1)(x+1)} = \int\left(\frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)}\right) dx =$$

$$\frac{4x^2-x-15}{(x-4)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \quad / \cdot (x-4)(x-1)(x+1)$$

$$4x^2-x-15 = A(x-1)(x+1) + B(x-4)(x+1) + C(x-4)(x-1)$$

$$4x^2-x-15 = A(x^2+x-x-1) + B(x^2+x-4x-4) + C(x^2-x-4x+4)$$

$$4x^2-x-15 = Ax^2 - A + Bx^2 - 3Bx - 4B + Cx^2 - 5Cx + 4C$$

$$4x^2-x-15 = (A+B+C)x^2 + (-3B-5C)x + (-A-4B+4C)$$

$$\begin{array}{rl} A+B+C = 4 & \\ -3B-5C = -1 & /+ \\ -A-4B+4C = -15 & \\ \hline -6B = -12 & /\cdot(-1) \\ 6B = 12 & /:6 \\ \underline{B = 2} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} -3B-5C = -1 & \\ -3\cdot 2-5C = -1 & \\ -6-5C = -1 & /+6 \\ -5C = 5 & /\cdot(-1) \\ 5C = -5 & /:5 \\ \underline{C = -1} & \end{array}$$

$$-A - 4B + 4C = -15$$

$$-A - 4\cdot 2 + 4\cdot(-1) = -15$$

$$-A - 8 - 4 = -15$$

$$-A - 12 = -15 \quad /+12$$

$$-A = -3 \quad /\cdot(-1)$$

$$\underline{A = 3}$$

$$= \int \left(\frac{3}{(x-4)} + \frac{2}{(x-1)} + \frac{-1}{(x+1)} \right) dx =$$

$$= \underline{\underline{3\ln|x-4| + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C}}$$

Milan Mroczkowski
sata150@gmail.com

PŘÍKLAD:

URČETE DÉLKU KŘIVKY $r = 2e^{3\varphi}$, KDE $\varphi \in (0, 2\pi)$.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{VZOREC:} \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} \, d\varphi}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(2e^{3\varphi})^2 + (6e^{3\varphi})^2} \, d\varphi =$$

$$(2e^{3\varphi})' = (2)' \cdot e^{3\varphi} + 2 \cdot (e^{3\varphi})' =$$
$$= 2 \cdot e^{3\varphi} \cdot (3\varphi)' =$$
$$= 6e^{3\varphi}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4e^{6\varphi} + 36e^{6\varphi}} \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{40e^{6\varphi}} \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (40e^{6\varphi})^{\frac{1}{2}} \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 40e^{3\varphi} \, d\varphi =$$

$$= 40\int_0^{2\pi} e^{3\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \left| \begin{aligned} 3\varphi &= s \\ 3\,d\varphi &= ds \\ d\varphi &= \frac{ds}{3} \end{aligned} \right| =$$

$$= 40\int_0^{2\pi} e^{s} \cdot \frac{ds}{3} =$$

$$= 40 \cdot \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} e^{s}\, ds =$$

$$= \frac{40}{3}\Big[e^{s}\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{40}{3}\left(e^{2\pi} - e^{0}\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{40}{3}\left(e^{2\pi} - 1\right) j}}$$

NEVLASTNÍ INTEGRÁLY

- NEVLASTNÍ INTEGRÁLY VLIVEM MEZE:

INTEGRUJI PŘES NEOMEZENÝ INTERVAL,
NAPŘ.: $(-\infty, +\infty)$; $(1, +\infty)$ ATD.

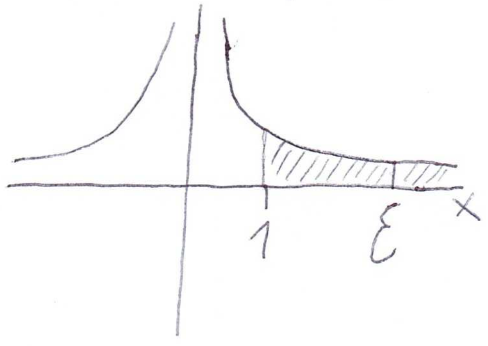
PŘÍKLAD:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$D_f = R \setminus \{0\}$

$H_f = R^+$

ROSTOUCÍ $(-\infty, 0)$, KLESAJÍCÍ $(0, +\infty)$



JDE MI O OBSAH TÉTO PLOCHY, KTERÁ JE JAKOBY OD 1 DO NEKONEČNA. MUSÍM SEM ZAVÉST LIMITU.

KLASICKÝ RIEMANNŮV INTEGRÁL LZE SPOČÍTAT ZA SPLNĚNÍ DVOU PODMÍNEK:

1. FUNKCE JE NA OMEZENÉM UZAVŘENÉM INTERVALU (NAPŘÍKLAD: OD $-\pi$ DO π)
2. OMEZENÁ FUNKCE

JAKOU PODMÍNKU NESPLŇUJE INTEGRÁL VIZ ZADÁNÍ?

INTERVAL 1 AŽ $+\infty$ NENÍ UZAVŘENÝ,

PROTO MUSÍM ZAVÁDĚT LIMITY, CO TO ZNAMENÁ?

ŘEKNU SI, ŽE BUDU POČÍTAT NĚJAKÝ INTEGRÁL TÉTO FUNKCE OD JEDNIČKY DO NĚJAKÉHO KONKRÉTNÍHO EPSILON. TO UMÍM, DOPLNÍM TO OBDÉLNÍČKAMA, SPOČÍTÁM, VYJDE MI NĚJAKÝ INTEGRÁL.

VZHLEDEM K TOMU, ŽE POČÍTÁM INTEGRÁL OD JEDNÉ DO NEKONEČNA, TAK SI ŘEKNU, ŽE TÍM EPSILONEM BUDU ŠOUPAT JAKOBY SMĚREM DO PRAVA. TO ŠOUPÁNÍ, AŽ SE DOSTANU NAD VŠECHNY MEZE DO NEKONEČNA, TAK MI TO DÁ ZŮSTATEK PLOCHY KTERÝ POTŘEBUJI. PRÁVĚ TEN POSUN DO NEKONEČNA NÁM ZAJISTÍ LIMITA.

V TOMTO PŘÍPADĚ UŽ TEN INTEGRÁL KTERÝ MÁM OD 1 DO ε JE INTEGRÁL URČITÝ, A TEN UŽ UMÍM SPOČÍTAT.

TEDY: 1. SPOČÍTÁM INTEGRÁL

2. POUŽIJI LIMITNÍ PŘECHOD, SPOČÍTÁM LIMITU, LIMITOU FUNKCI JAKOBY PROTÁHNU AŽ DO NEKONEČNA

$\Rightarrow$ DOSTANU OBSAH TÉTO PLOCHY

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_1^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\frac{\varepsilon^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-1} - \frac{\frac{1}{1^1}}{-1} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right] =$$

$$= \left[-\frac{1}{\infty} + 1 \right] = \left[0 + 1 \right] = \underline{\underline{1}}$$

Milan Mroczkowski
sata150@gmail.com
yesit.cz

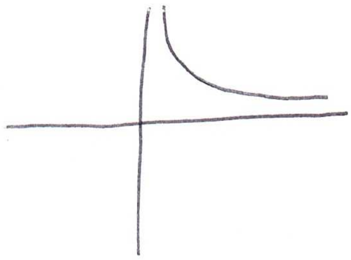
PŘÍKLAD:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$D_f = R_0^+$

H_f = URČITĚ BUDOU KLADNÉ, DOSTANU HODNĚ MALÉ ČÍSLO

KDYŽ DÁM ZA x MALOU HODNOTU, TAK VÝSLEDEK BUDE MÍT VELKOU HODNOTU, KDYŽ ZA x DÁM VELKOU, TAK VÝSLEDEK BUDE MÍT MALOU HODNOTU $\Rightarrow$ KLESAJÍCÍ FUNKCE.



$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_1^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_1^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to \infty} \left[\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} 2\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = \left[2\sqrt{\infty} - 2 \right] = \left[2(\sqrt{\infty} - 1) \right] =$$

$$= \underline{\underline{\infty}}$$

PŘÍKLAD:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$$

1. JAK SI MYSLÍM, ŽE TATO FUNKCE VYPADÁ? ODHAD?

VE JMENOVATELI DOSTANU VŽDY KLADNÉ ČÍSLO

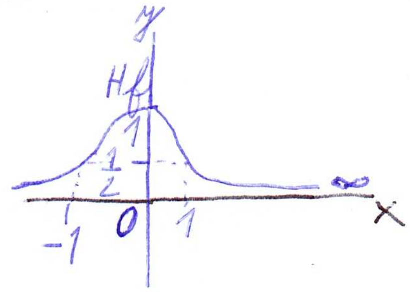
$P_x = ?$ $\quad$ $P_y = ?\ x = 1$ $\quad$ $P_y = ?\ x = -1$

$y = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $y = \frac{1}{1+(-1)^2} = \frac{1}{2}$

$\underline{Df} = R \quad (-\infty, +\infty)$

$[1, \frac{1}{2}]$ část návrhu : $[-1, \frac{1}{2}]$

CO TŘEBA LIMITY $-\infty$ A $+\infty$?



$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = \left[\frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = \left[\frac{1}{1+(-\infty)} = \frac{1}{-\infty}\right] = 0$$

OBĚ LIMITY JSOU NULA

OBOR HODNOT?

KDYŽ DOSADÍM NULU $\frac{1}{1+0} = 1$ $\quad$ V JEDNIČCE BUDE EXTRÉM, JAKÝ EXTRÉM?

$[0, 1]$

LOKÁLNÍ MAXIMUM

SUDÁ NEBO LICHÁ FCE?

$$f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

SUDÁ FUNKCE, "PROTOŽE VYPADÁ STEJNĚ JAKO ZADÁNÍ."

JAK SI VÝPOČET INTEGRÁLU USNADNIT?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$$

ŽE VEZMEME POUZE INTEGRÁL OD NULY DO NEKONEČNA A VYNÁSOBÍM HO DVĚMA

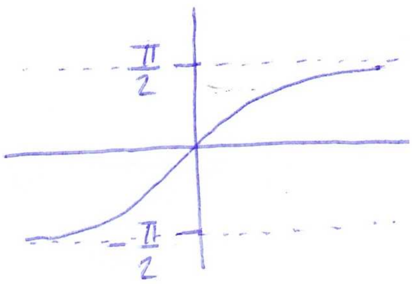
$$= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{\varepsilon \to \infty} 2 \cdot \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} 2 \left[\operatorname{arctg} x \right]_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to \infty} 2 \left(\operatorname{arctg} \varepsilon - \operatorname{arctg} 0 \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \underline{\underline{\pi}}$$

$\operatorname{arctg} \infty$

OMEZEN INTERVALEM $\Rightarrow$



- NEVLASTNÍ INTEGRÁLY VLIVEM FUNKCE

RIEMANNŮV INTEGRÁL - KDYŽ POČÍTÁM NĚJAKÉ FUNKCE, TAK NA TU FUNKCI KLADU DVA POŽADAVKY:

1. INTEGRÁL POČÍTÁM PŘES UZAVŘENÝ OMEZENÝ INTERVAL.
2. FUNKCE SAMA O SOBĚ MUSÍ BÝT OMEZENÁ NA TOM INTERVALU.

① OMEZENÝ UZAVŘENÝ INTERVAL 

$\langle a, b \rangle$

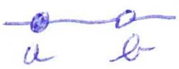
LZE ZNÁZORNIT ÚSEČKOU

POZN.:

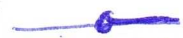
OMEZENÝ OTEVŘENÝ INTERVAL 

(a, b)

OMEZENÝ POLOUZAVŘENÝ INTERVAL, NAPŘ.:



$\langle a, b)$

NEOMEZENÝ UZAVŘENÝ NAPŘ.: 

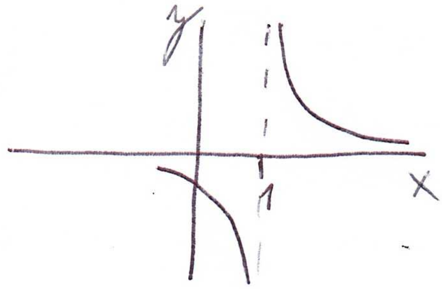
DO $+\infty$

TEDY, ZDE NEBUDE SPLNĚN DRUHÝ POŽADAVEK.

PŘÍKLAD:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx$$

CO JE TO ZA FUNKCI? HYPERBOLA (LOMENÉ FUNKCE)



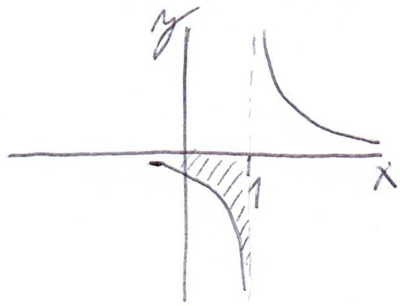
NENÍ DEFINOVANÁ V JEDNIČCE
(HYPERBOLA POSUNUTÁ O JEDNIČKU DOPRAVA)

PROČ JE TENHLE INTEGRÁL NEVLASTNÍ? CO NÁM TEĎ DĚLÁ PROBLÉM? UŽ NE MEZE (NULA A JEDNA) TO JE OK, ALE:

PROBLÉMY: (NENÍ DEFINOVANÁ V JEDNIČCE)

: KDYŽ SE K JEDNIČCE BLÍŽÍME ZLEVA, TAK UTÍKÁ DO $-\infty$, TO ZNAMENÁ, ŽE TA FUNKCE NA INTERVALU $\langle 0, 1\rangle$ NENÍ VŮBEC OMEZENÁ, PROTO INTEGRÁL SPOČÍTÁM TROCHU JINAK

NYNÍ POTŘEBUJI SPOČÍTAT OBSAH TÉTO PLOCHY:



$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx =$$

PROBLÉM JE V JEDNIČCE, K PŘÍKLADU:

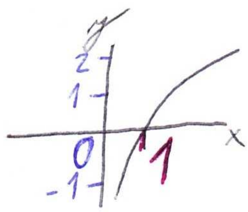
DOKÁŽEME INTEGROVAT NA INTERVALU MENŠÍM NEŽ $\langle 0,1\rangle$? ANO, NAPŘ: $\langle 0,\frac{1}{2}\rangle$, $\langle 0,\frac{1}{4}\rangle$, $\langle 0,\frac{7}{8}\rangle$ ATD,

PROTO BUDU INTEGROVAT OD NULY DO NĚJAKÉHO a.
KAM PŮJDE TO áčko? DO JEDNIČKY, A ODKUD?
ZLEVA 1^-

$$= \lim_{a\to 1^-} \int_0^a \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1^-} \Big[\ln|x-1|\Big]_0^a =$$

$$= \lim_{a\to 1^-} \Big[\ln|a-1| - \ln|0-1|\Big] =$$

$$= \lim_{a\to 1^-} \Big[\ln|a-1| - \ln|-1|\Big] =$$



$$= \lim_{a\to 1^-} \Big[\ln|a-1| - \ln 1\Big] =$$

$$= \lim_{a\to 1^-} \Big[\ln|a-1| - 0\Big] =$$

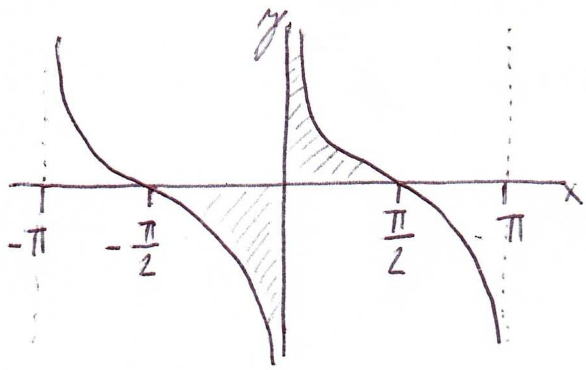
Blížíme se zleva. Když malé záporné číslo (záporná nula) dám do absolutní hotnoty, tak dostanu malou kladnou nulu (malé kladné číslo). Když teď spočítám přirozený logaritmus z nějakého malého kladného čísla, tak dostanu mínus nekonečno.

$$= -\infty$$

PŘÍKLAD

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cot g\, x \, dx =$$

OBRÁZEK:



VE KTERÝCH HODNOTÁCH NENÍ COTANGENS DEFINOVANÁ? KDE JSOU TY ASYMPTOTY?
0 A π

KLESAJÍCÍ FCE

OD NULY DO $\frac{\pi}{2}$ TA HODNOTA BUDE KLADNÁ
OD $-\frac{\pi}{2}$ DO NULY BUDE HODNOTA ZÁPORNÁ, TO ZNAMENÁ ŽE KDYŽ VEZMU KLADNOU A K TOMU DÁM ZÁPORNOU, TAK BY MĚLA VYJÍT NULA. JE SYMETRICKÁ.

ČEMU SE ROVNÁ INTEGRÁL? (NE PLOCHA)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot g\, x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx =$$

MÁME COSINUS A SINUS V PRVNÍ MOCNINĚ. POKUD JSOU TO LICHÉ MOCNINY, TAK JE DOBRÁ SUBSTITUCE NA SINUS

MEZIVÝPOČET:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \left| \begin{array}{r} \sin x = s \\ \cos x \, dx = ds \\ dx = \frac{ds}{\cos x} \end{array} \right| = \int \frac{\cos x}{s} \cdot \frac{ds}{\cos x} = \int \frac{1}{s} \, ds = \ln|s| =$$

$$= \ln|\sin x|$$

POZNÁMKA:

MĚ ZAJÍMÁ TEĎ INTEGRÁL, V PODSTATĚ POKUD MI INTEGRÁL VYJDE ČÍSLO NĚJAKÉ REÁLNÉ, TŘEBA PĚTKA, TAK POTOM ŘEKNU ŽE TEN INTEGRÁL SE ROVNÁ 5 A DRUHÁ −5, KDYŽ TO SEČTU VYJDE NULA.
INTEGRÁL BUDU POČÍTAT JAKO NEVLASTNÍ.
KDYŽ SE BLÍŽÍM K NULE ZPRAVA TAK TA FUNKCE COTANGENS UTÍKÁ DO $+\infty$. TO ZNAMENÁ ŽE TAM MUSÍME POUŽÍT LIMITNÍ PŘECHOD TENTOKRÁT ZA NULU.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot g\, x\, dx = \Big[\ln|\sin x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{a\to 0^+}\Big[\ln|\sin x|\Big]_a^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\Big[\ln|\sin \tfrac{\pi}{2}| - \ln|\sin a|\Big] = \lim_{a\to 0^+}\Big[\ln 1 - \ln|\sin a|\Big] =$$

$$= \Big[0 - \ln|\sin 0^+|\Big] =$$

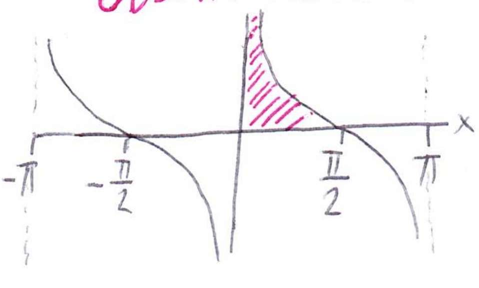
KDYŽ JDEME K NULE ZPRAVA
$\sin 0 = 0$
↓
TAKŽE $\ln 0^+ = -\infty$
LOGARITMUS NULY ZPRAVA

$0 - (-\infty) = \infty$

$$= \infty$$

TEĎ SE PODÍVÁM CO MI VYŠLO, VYŠLO MI, ŽE OBSAH PLOCHY JE NEKONEČNO.

OBSAH TÉTO PLOCHY JE NEKONEČNO



ČEMU SE ROVNÁ INTEGRÁL

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cot g\, x\, dx\ ? \quad = -\infty$$

INTEGRÁL JSEM JAKOBY ROZKOUSKOVAL, TAK SE ROVNÁ TOMUTO:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cotg x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cotg x \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cotg x \, dx =$$

$$= -\infty + \infty$$

CO TO ZNAMENÁ? NEVÍM KOLIK TO JE.
KDYBY TOHLE BYLO ČÍSLO KLADNÉ REÁLNÉ TŘEBA 10, TAK TAMTO BY BYLO -10.

Z DŮVODU ŽE SČÍTÁM $-\infty+\infty$, TAK JE TO NEURČITÝ VÝRAZ, NELZE ŘÍCT KOLIK SE TO ROVNÁ I PŘESTO ŽE VÍM, ŽE PLOCHY JSOU STEJNÉ. TO ZNAMENÁ, ŽE TENTO INTEGRÁL DIVERGUJE.

CO JE TO, ŽE INTEGRÁL DIVERGUJE?
(POSLOUPNOST DIVERGUJE?)

a) ŽE SE ROVNÁ $+\infty$ NEBO $-\infty$.

b) NEBO POSLOUPNOST NEMÁ LIMITU - PROTOŽE NEVÍM JESTLI POSLEDNÍ ČLEN BUDE -1 NEBO 1

$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

(KDYBY KONVERGOVALA POSLOUPNOST, VYŠLO BY REÁLNÉ ČÍSLO)

PŘÍKLAD

$$\int_0^1 x \cdot \ln x =$$

1. ODHADNOUT JAK TATO FUNKCE VYPADÁ

$D_f = R^+$ (ln NULY NEBO ZÁPORNÉHO ČÍSLA NELZE)

$\lim_{x \to \infty} (x \cdot \ln x) = +\infty$

PRŮSEČÍK

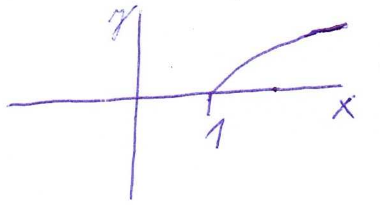
$P_x = ?\ y=0$ $\quad P_y = ?\ x=1$

$0 = x \cdot \ln x \;/ \cdot \frac{1}{\ln x}$ $\quad y = 1 \cdot \ln 1$

$0 = x \quad P_x[0,0]$ $\quad y = 1 \cdot 0$

$y = 0 \quad P_y[1,0]$

y OD 1čKY DO NEKONEČNA ROSTE A LOGARITMUS OD 1čKY DO NEKONEČNA ROSTE TAKÉ, TAKŽE FUNKCE JE ROSTOUCÍ.



JAK SE FUNKCE CHOVÁ MEZI NULOU A JEDNIČKOU?

ZAJÍMÁ MĚ LIMITA BLÍZKO NULY.

$\lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x) =$

↑ PŮJDE K NULE ↑ PŮJDE K $-\infty$

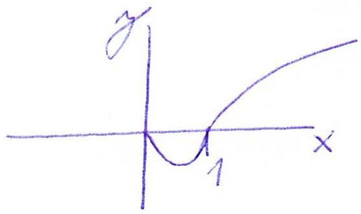
LIMITA TYPU: $\boxed{0 \cdot (-\infty)}$ COŽ JE NEURČITÝ VÝRAZ

$$= \lim_{x \to 0^+} \ln x \cdot x \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{-x^2}{1} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = -0 = \underline{=0}$$

SPOČÍTÁM L'HOSPITALOVÝM PRAVIDLEM, ALE MUSÍ SE PRVNÍ LIMITA DOSTAT DO STAVU PODÍLU, JAK? JEDEN ZE ČLENŮ POTŘEBUJI DOSTAT DO JMENOVATELE

ZNÁME: $\boxed{a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}},\ b \neq 0 \qquad \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = a \cdot b}$



2. SPOČÍTÁM INTEGRÁL JAKO NEURČITÝ

$$\int x \ln x = \left| \begin{matrix} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \underline{\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 x \cdot \ln x = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 x \cdot \ln x = \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_a^1 =$$

$$= \left[\left(\frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} \right) - \left(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} \right) \right] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} \right) \right] =$$

$$= \left[-\frac{1}{4} - \underbrace{\frac{a^2}{2} \ln a}_{\Downarrow} + \underbrace{\frac{a^2}{4}}_{\Downarrow\, 0} \right] =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

a POSÍLÁM
k NULE ZPRAVA

$$\Downarrow$$

$$\lim_{a \to 0^+} \left(\frac{a^2}{2} \ln a \right) = \lim_{a \to 0^+} \frac{\ln a}{\frac{1}{\frac{a^2}{2}}} = \lim_{a \to 0^+} \frac{(\ln a)'}{\left(\frac{2}{a^2} \right)'} = \lim_{a \to 0^+} \frac{\frac{1}{a} \cdot (a)'}{\frac{(2)' \cdot a^2 - 2 \cdot (a^2)'}{(a^2)^2}} =$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{\frac{-2 \cdot 2a}{a^4}} = \lim_{a \to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{\frac{-4a}{a^4}} = \lim_{a \to 0^+} \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{a^4}{-4a} \right) = \lim_{a \to 0^+} \frac{a^4}{-4a^2} = \lim_{a \to 0^+} \frac{a^2}{-4} = \lim_{a \to 0^+} \frac{a}{-2} = \underline{\underline{0}}$$