KDYŽ MÁM TENTO ZÁPIS:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

URČITÝ INTEGRÁL OD a DO b DANÉ FUNKCE $f(x)$,
INTEGRUJEME PODLE PROMĚNNÉ x. (dx)

JAK TO SPOČÍTÁM, CO S TÍM?

NEJDŘÍV MUSÍM NAJÍT PRIMITIVNÍ FUNKCI,
JEJÍŽ DERIVACE SE ROVNÁ URČITÉMU INTEGRÁLU
A PAK DO TOHO POUZE DOSAZUJEME.

$$\int_4^9 5\sqrt{x^3}\,dx = 5\int_4^9 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[5\,\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]_4^9 = \left[5\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_4^9 =$$

$$= \left[5x^{\frac{5}{2}}\,\frac{1}{\frac{5}{2}}\right]_4^9 = \left[5x^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{2}{5}\right]_4^9 = \left[2x^{\frac{5}{2}}\right]_4^9 =$$

$$= 2\cdot 9^{\frac{5}{2}} - 2\cdot 4^{\frac{5}{2}} =$$

$$= 2\left(9^{\frac{5}{2}} - 4^{\frac{5}{2}}\right) =$$

POZN: MÁM 9, Z TOHO SPOČTU ODMOCNINU A PAK TO DÁM NA 5tou. JE JEDNO ZDA PRVNÍ MOCNÍM ČI ODMOCŇUJI.

$$= \underline{\underline{2\left(3^5 - 2^5\right)}}$$

1. $$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b$$

$$\Downarrow$$

2. $$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

LZE K POČTU POUŽÍT 1. i 2. VARIANTA
PRO:

METODA PER PARTES V URČITÉM INTEGRÁLU

YESIT.CZ MILAN MROCZKOWSKI SATA150@GMAIL.COM

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx =$$

JAK BYCHOM TENTO INTEGRÁL POČÍTALI JAKO NEURČITÝ?

PER PARTES

$$= \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \Big[x \cdot \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sin x \, dx =$$

$$= \Big[x \cdot \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx =$$

$$= \Big[x \cdot \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \Big[\underline{\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2}} - \underline{0 \cdot \sin 0}\Big] + \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0\right) + \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} + (0 - 1) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

PER PARTES S URČITÝM INTEGRÁLEM

$$\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = \int_1^e 1\cdot\sin(\ln x)\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sin(\ln x) & u' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| =$$

$$= \Big[\sin(\ln x)\cdot x\Big]_1^e - \int \cos(\ln x)\,\frac{1}{x}\cdot x\,dx =$$

$$= \Big[\sin(\ln x)\cdot x\Big]_1^e - \int \cos(\ln x)\,dx =$$

$$= \Big[\sin(\ln x)\cdot x\Big]_1^e - \left| \begin{array}{ll} u = \cos(\ln x) & u' = -\sin(\ln x)\frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| =$$

$$= \Big[\sin(\ln x)\cdot x\Big]_1^e - \left\{ \Big[\cos(\ln x)\cdot x\Big]_1^e - \int_1^e -\sin(\ln x)\,\frac{1}{x}\cdot x\,dx \right\} =$$

$$= \Big[\sin(\ln x)\cdot x\Big]_1^e - \left\{ \Big[\cos(\ln x)\cdot x\Big]_1^e + \int_1^e \sin(\ln x)\,dx \right\} =$$

$$= \Big[\sin(\ln x)\cdot x\Big]_1^e - \Big[\cos(\ln x)\cdot x\Big]_1^e - \int_1^e \sin(\ln x)\,dx$$

ZE ZADÁNÍ

$$\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = \Big[\sin(\ln x)\,x\Big]_1^e - \Big[\cos(\ln x)\,x\Big]_1^e - \int_1^e \sin(\ln x)\,dx \quad \Big/ + \int_1^e \sin(\ln x)\,dx$$

$$2\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = \Big[\sin(\ln x)\,x\Big]_1^e - \Big[\cos(\ln x)\,x\Big]_1^e$$

$$2\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = \Big[\sin(\ln e)\,e - \sin(\ln 1)\cdot 1\Big] - \Big[\cos(\ln e)\,e - \cos(\ln 1)\cdot 1\Big]$$

$$2\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = [\sin 1 \cdot e - \sin 0 \cdot 1] - [\cos 1 \cdot e - \cos 0 \cdot 1]$$

$$2\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = (e \sin 1 - 0) - (e \cos 1 - 1)$$

$$2\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = e \sin 1 - e \cos 1 + 1$$

$$2\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = e(\sin 1 - \cos 1) + 1$$

$$\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = \frac{e(\sin 1 - \cos 1) + 1}{2}$$

$$\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}[e(\sin 1 - \cos 1) + 1]}}$$

URČITÉ INTEGRÁLY, KTERÉ SE DAJÍ ŘEŠIT SUBSTITUCÍ MŮŽEME ŘEŠIT DVĚMA ZPŮSOBY:

1) CELÝ INTEGRÁL VYPOČÍTAT JAKO NEURČITÝ, A PAK DOSADIT NA KONCI MEZE.

2) INTEGRÁL SPOČÍTAT OD ZAČÁTKU JAKO URČITÝ S TÍM, ŽE TU SUBSTITUCI POUŽIJI JENOM NA TU FUNKCI KTEROU INTEGRUJI, ALE TU SUBSTITUCI POUŽIJI I NA TY MEZE.

1) SPOČÍTÁM INTEGRÁL JAKO NEURČITÝ

$$\int_0^4 \frac{20x}{\sqrt{1+5x^2}}\,dx = ?$$

$$\int \frac{20x}{\sqrt{1+5x^2}} = \left|\begin{aligned} 1+5x^2 &= s \\ 10x\,dx &= ds \\ dx &= \frac{ds}{10x} \end{aligned}\right| =$$

$$= \int \frac{20x}{\sqrt{s}} \cdot \frac{ds}{10x} =$$

$$= \int \frac{20x}{10x} \cdot \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \cdot ds =$$

$$= 2\int s^{-\frac{1}{2}}\,ds =$$

$$= 2\,\frac{s^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}} + C = 2\,\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot s^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{1} + C =$$

$$= 4 \cdot s^{\frac{1}{2}} + C = 4\sqrt{s} + C = \underline{4\sqrt{1+5x^2} + C}$$

$$= \left[4\sqrt{1+5x^2}\right]_0^4 = \left[4\sqrt{1+5\cdot 4^2} - 4\sqrt{1+5\cdot 0^2}\right] =$$

$$= 4\cdot\sqrt{81} - 4\cdot\sqrt{1} = 4\cdot 9 - 4\cdot 1 = \underline{\underline{32}}$$

2)

$$\int_0^4 \frac{20x}{\sqrt{1+5x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{r} 1+5x^2 = s \\ 10x\,dx = ds \\ dx = \frac{ds}{10x} \end{array} \right| =$$

TEŽ ŘEŠÍM
PŘI SUBSTITUCI:
$1+5\cdot 4^2 = 81$
$1+5\cdot 0^2 = 1$

$$= \int_1^{81} \frac{20x}{\sqrt{s}} \cdot \frac{ds}{10x} =$$

$$= \int_1^{81} \frac{20x}{10x} \cdot \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\,ds =$$

$$= 2\int_1^{81} s^{-\frac{1}{2}}\,ds =$$

$$= \left[2\frac{s^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}} \right]_1^{81} = \left[2\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^{81} = \left[2\cdot\frac{s^{\frac{1}{2}}}{1}\cdot\frac{2}{1} \right]_1^{81} =$$

$$= \left[4s^{\frac{1}{2}} \right]_1^{81} =$$

$$= 4\cdot\sqrt{81} - 4\cdot\sqrt{1} =$$

$$= 4\cdot 9 - 4\cdot 1 =$$

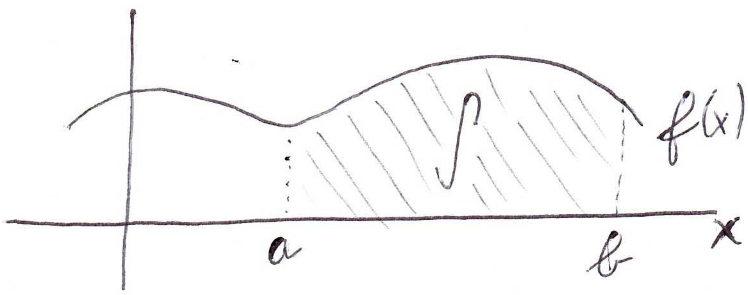
$$= \underline{\underline{32}}$$

JAK SOUVISÍ INTEGRÁL S OBSAHEM PLOCHY?

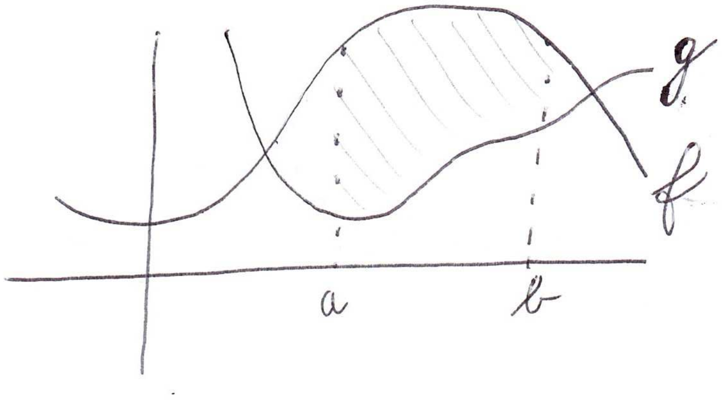
- POČÍTÁME PLOCHU POD KŘIVKOU

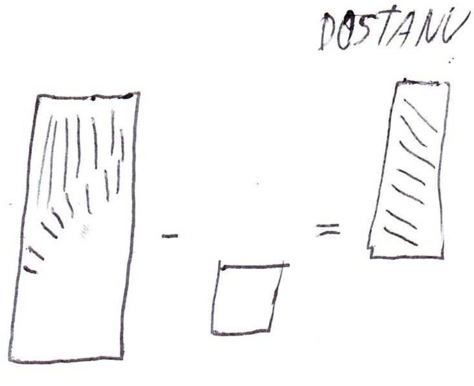
CHCI SPOČÍTAT OBSAH PLOCHY, KTERÁ JE OMEZENA SHORA KŘIVKOU A ZE SPODA OSOU X.

OBSAH PLOCHY JE V PODSTATĚ INTEGRÁL.



$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$





SPOČÍTÁM TO JAKO ROZDÍL

$$S = \int_a^b f - g$$

PŘ:

URČI OBSAH PLOCHY KTERÝ JE VYMEZENÝ GRAFY DVOU FUNKCÍ:

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

$g(x) = 7 - 2x - x^2$

$S = ?$

$x^2 - 4x - 5$

$(x^2 - 4x) \quad -5$

$\left(x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 5$

$(x^2 - 4x + 4) - (-2)^2 - 5$

$(x - 2)^2 - 4 - 5$

$(x - 2)^2 - 9$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - (-20)}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2}$ — $5 = x_1$, $-1 = x_2$

$7 - 2x - x^2 = -x^2 - 2x + 7$

$-1(x^2 + 2x) \quad + 7$

$-1\left(x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot (-1) + 7$

$-1(x + 2x + 1^2) + 1 + 7$

$-(x + 1)^2 + 8$

$x^2 + 2x - 7$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{32}}{2}$

$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{32}}{2}$

$x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{4 \cdot 8}}{2}$

$x_{1,2} = -1 \pm \frac{2\sqrt{8}}{2}$

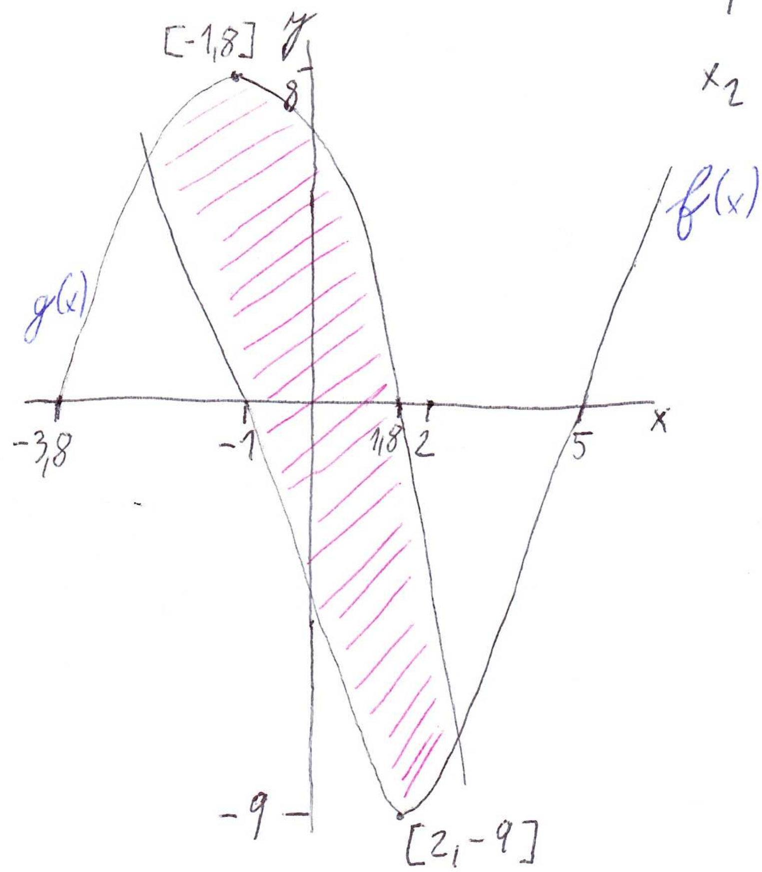
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{8}$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4 \cdot 2}$

$$x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = -1 + 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = -1 - 2\sqrt{2}$$



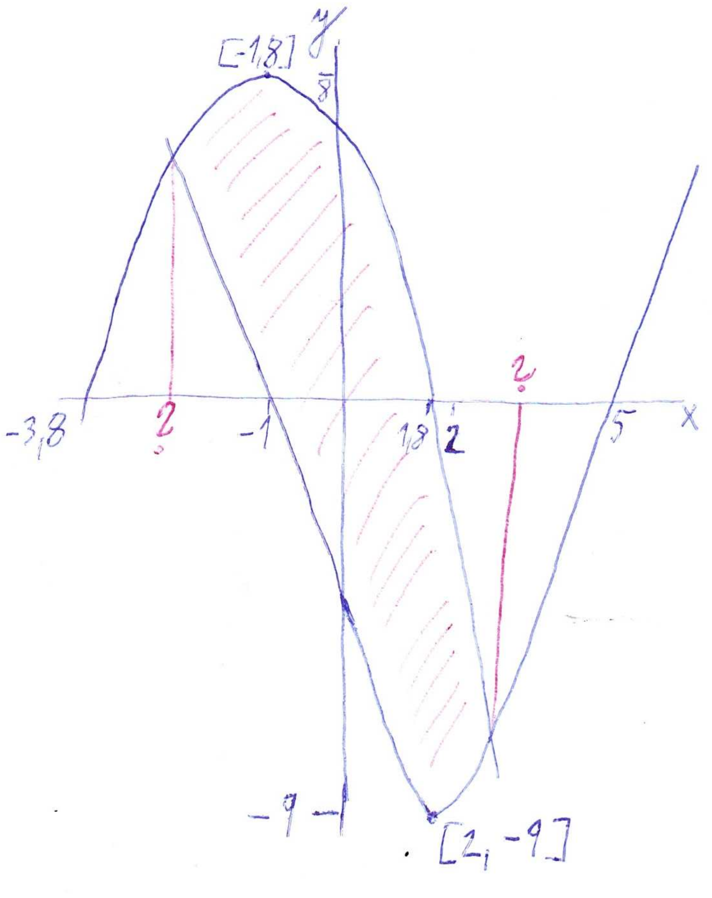
SESTAVÍM NEURČITÝ INTEGRÁL:

HORNÍ FUNKCE MÍNUS DOLNÍ FUNKCE
(TA CO JE VÝŠE)

$$\int g(x) - \int f(x)$$

$$\int -x^2 - 2x + 7\,dx - \int x^2 - 4x - 5\,dx$$

JAK ZJISTÍM MEZE?



HLEDÁM SOUŘADNICE PRŮSEČÍKŮ, STAČÍ TY 2 FUNKCE DÁT DO ROVNOSTI, PAK VYŘEŠIT KVADRATICKOU ROVNICI, TÍM ZÍSKÁME SOUŘADNICE S PRŮSEČÍKEM OSY.

$$-x^2-2x+7 = x^2-4x-5 \quad /+x^2$$

$$-2x+7 = 2x^2-4x-5 \quad /+2x$$

$$7 = 2x^2-2x-5 \quad /-7$$

$$0 = 2x^2-2x-12 \quad /\cdot\frac{1}{2}$$

$$0 = x^2-1x-6$$

$$x^2-x-6=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-24)}}{2}$$

MEZE:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad 3 = x_1, \quad -2 = x_2$$

$$\int_{-2}^{3} -x^2-2x+7\,dx - \int_{-2}^{3} x^2-4x-5\,dx =$$

$$= \left[\frac{-x^{2+1}}{2+1} - \frac{2x^{1+1}}{1+1} + 7x\right]_{-2}^{3} - \left[\frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{4x^{1+1}}{1+1} - 5x\right]_{-2}^{3} =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 7x\right]_{-2}^{3} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 5x\right]_{-2}^{3} =$$

POZNÁMKA: VŽDY POČÍTÁM: HORNÍ MEZ − DOLNÍ MEZ

$$= \left[\frac{-3^3}{3} - \frac{2\cdot 3^2}{2} + 7\cdot 3 - \left(\frac{-(-2)^3}{3} - \frac{2\cdot(-2)^2}{2} + 7\cdot(-2)\right)\right] - \left[\frac{3^3}{3} - \frac{4\cdot 3^2}{2} - 5\cdot 3 - \left(\frac{-2^3}{3} - \frac{4\cdot(-2)^2}{2} - 5\cdot(-2)\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{-27}{3} - \frac{18}{2} + 21 - \frac{8}{3} + \frac{8}{2} + 14\right] - \left[\frac{27}{3} - \frac{36}{2} - 15 + \frac{8}{3} + \frac{16}{2} - 10\right] =$$

$$= \left(-9 - 9 + 21 + \frac{-16+24}{6} + 14\right) - \left(9 - 18 - 15 + \frac{16+48}{6} - 10\right) =$$

$$= \left(\frac{8}{6} + 17\right) - \left(\frac{64}{6} - 34\right) =$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{17}{1} - \frac{64}{6} + \frac{34}{1} =$$

$$= \frac{8 + 102 - 64 + 204}{6} =$$

$$= \frac{250}{6} = \underline{\underline{\frac{125}{3}}}\ j^2$$

POČÍTALI JSME PLOCHU

POZNÁMA: j^2 = jednotky

PŘ:

(OBSAH PLOCHY ?)

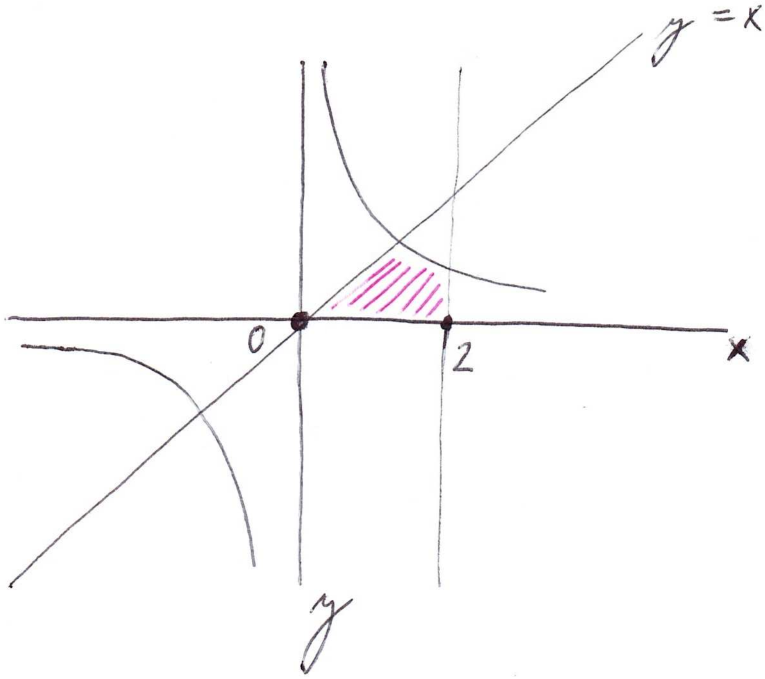
$S = ?$

$y = x$

$y = \frac{1}{x}$

$y = 0$

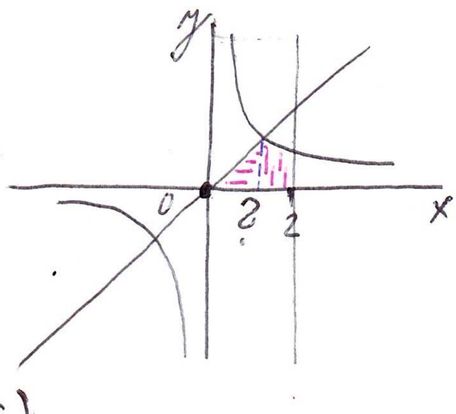
$x = 2$



NAJÍT OBJEKT, KTERÝ JE OMEZEN VŠEMA TĚMA ČTYŘMA KŘIVKAMA

KTERÁ FUNKCE JE DOLE? OSA x

KTERÁ FUNKCE JE NAHOŘE? JSOU DVĚ FUNKCE NAHOŘE, PROTO MUSÍME TO ROZDĚLIT NA DVA INTEGRÁLY



(x JE NAHOŘE A JINÉ x JE DOLE)

$$\int x - 0 \, dx + \int \frac{1}{x} - 0 \, dx$$

MEZE? MEZE URČUJEME NA OSE X.

$$x = \frac{1}{x} \quad / \cdot x$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

MEZ: $x = 1$

MEZ JE V 1, PROTOŽE SE PROTÍNÁ KŘIVKA x A $\frac{1}{x}$.

MÁME MEZE: 0, 1, 2

$$\int_0^1 x - 0 \, dx + \int_1^2 \frac{1}{x} - 0 \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\ln x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] + \left[\ln(2) - \ln(1)\right] =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln 2 \; j^2}}$$

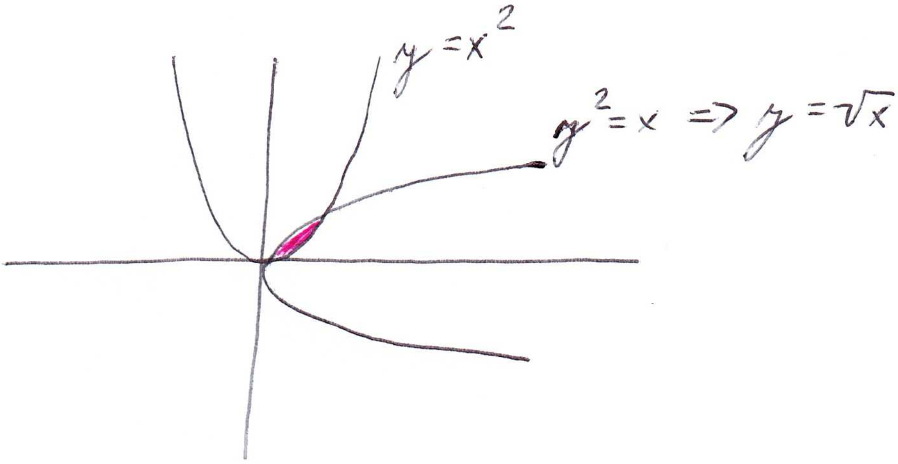
PŘ:

OBSAH PLOCHY? (JE OMEZEN DVĚMA KŘIVKAMA)

$S = ?$

$y = x^2$

$y^2 = x$



CO VÍME O FUNKCI DRUHÁ ODMOCNINA?
JE DEFINOVÁNA POUZE PRO KLADNÁ ČÍSLA,
JE FUNKCE INVERZNÍ K FUNKCI x^2

$$\int \sqrt{x} - x^2 \, dx$$

MEZE?
PRO KTERÉ ČÍSLO SE ROVNÁ ODMOCNINA MOCNINĚ?

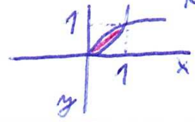
$$\sqrt{x} = x^2 \qquad \underline{1}$$

POD ODMOCNINOU NEMŮŽE BÝT ZÁPORNÉ ČÍSLO,
DÁLE VIZ GRAF, MEZ JE V NULE.

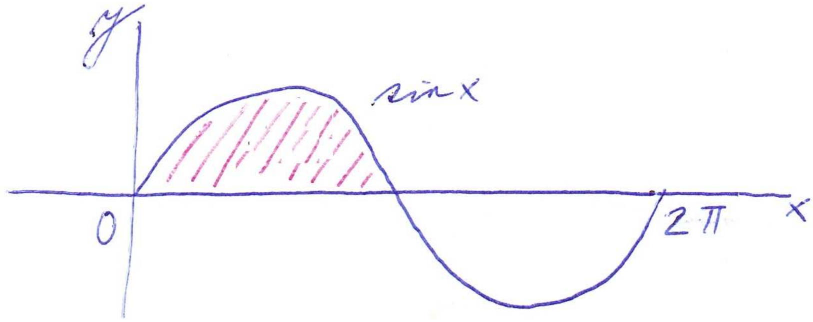
$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{1}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{1}} - \frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_0^1 = \left[\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right] - \left[\frac{0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{0^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}\, j^2$$

POZNÁMKA: ČTVEREC JE ROZDĚLEN NA $3 \cdot \frac{1}{3}$



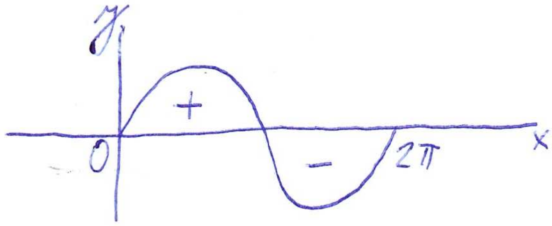
MÁME FUNKCI $\sin x$ A CHTĚL BYCH SPOČÍTAT OBSAH PLOCHY
KTERÁ JE ODVOZENÁ GRAFEM FUNKCE $\sin x$ A OSOU x,
TO ZNAMENÁ OBSAH TOHO NAHOŘE A TOHO DOLE.



$$2\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

CO BY SE STALO, KDYBYCH TEN INTEGRÁL TEĎ POČÍTAL JINAK? ŘEKNU SI, TAK TAM MÁM sinus TO ZNAMENÁ ŽE TO ZINTEGRUJI OD NULY DO 2π, CO SE STANE?

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$$



BYLA BY TO NULA, PROČ BY TO BYLA NULA? TATO PLOCHA BY MĚLA KLADNÉ ZNAMÉNKO V INTEGRÁLU, TA DRUHÁ BY MĚLA ZÁPORNÉ ZNAMÉNKO $\Rightarrow$ VYJDE PLOCHA NULOVÁ, COŽ NENÍ.

KDYŽ ŘEŠÍM INTEGRÁL FUNKCÍ KDE MÁM KUS POD OSOU x, KUS NAD OSOU x, TAK TO VŽDY MUSÍM DĚLIT NA JEDNOTLIVÉ ČÁSTI A POČÍTAT TO POSTUPNĚ

$$2\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[2\cdot(-\cos x)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[2\cdot(-\cos\pi) - 2\cdot(-\cos 0)\right] =$$

$$= 2\cdot[-(-1)] - 2\cdot[-(1)] =$$

$$= 2\cdot 1 + 2 =$$

$$= \underline{\underline{4\ j^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \left[-\cos 2\pi - (-\cos 0)\right] =$$

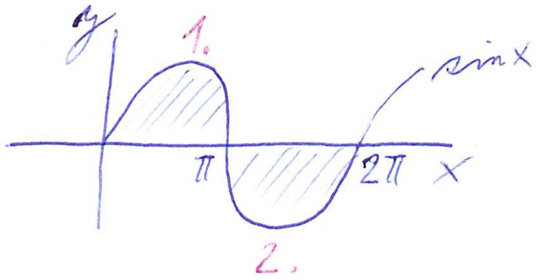
$$= -(1) - [-(1)] =$$

$$= -1 + 1 =$$

$$= 0\ j^2$$

. COŽ JE PRO MNE
K NIČEMU, PROTOŽE
PLOCHA NENÍ NULOVÁ

JAK POČÍTAT?



$$\int_0^{\pi} \sin x - 0\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 - \sin x =$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \left[-\cos \pi - (-\cos 0)\right] + \left[\cos 2\pi - \cos \pi\right] =$$

$$= \left[-(-1) - (-1)\right] + \left[1 - (-1)\right] =$$

$$= 1 + 1 + 2 = \underline{\underline{4j^2}}$$

PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ KŘIVKY - CO TO JE?
- JAK TO VYPADÁ?

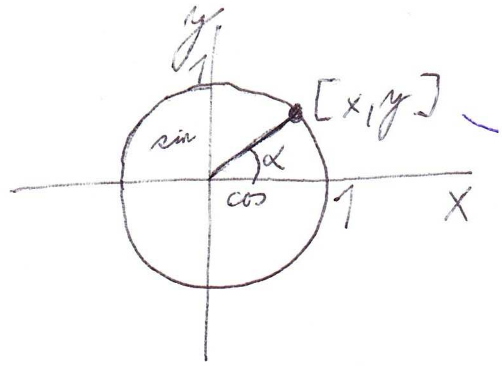
TENTO ZÁPIS JE PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ NĚJAKÉ KŘIVKY:

$$x = s - \sin s$$
$$y = 1 - \cos s$$
$$s \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

V PARAMETRICKÉM VYJÁDŘENÍ JSOU DANÉ SOUŘADNICE BODU: x-ová, y-ová. x-ová JE DANÁ JAKO NĚJAKÁ FUNKCE PARAMETRU s. y-ová JE DANÁ JAKO NĚJAKÁ FUNKCE PARAMETRU s.

ZATÍM JSME POUŽÍVALI EXPLICITNÍ VYJÁDŘENÍ.

KDYBYCH CHTĚL VYJÁDŘIT KRUŽNICI V EXPLICITNÍM ZÁPISU, JAK ZAPÍŠI ROVNICI KRUŽNICE?



- VZTAH MEZI DVĚMA BODY

$$x^2 + y^2 = 1$$

(KRUŽNICE JE O POLOMĚRU 1)

VYJÁDŘENÍ SOUŘADNICE NAŠEHO BODU POMOCÍ ÚHLU α:

$$\underbrace{\begin{aligned} x &= \cos\alpha \\ y &= \sin\alpha \end{aligned}}$$

- FUNKCE POPISUJE x-ovou SOUŘADNICI

TOHLE JE PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ KRUŽNICE

BUDEME POČÍTAT OBSAH PLOCHY.

CO JE TO CYKLOIDA? JAK VYPADÁ?

SESTAVÍM KRUŽNICI A NA NÍ VEMEM PEVNĚ 1 BOD, TEĎ TU KRUŽNICI BUDU VÁLET, TAK TEN BOD NÁM OPÍŠE NĚJAKOU KŘIVKU A TATO KŘIVKA JE CYKLOIDA. JAK VYPADÁ?

Př: VYPOČÍTAT: OBSAH PLOCHY POD PARAMETRICKY ZADANOU KŘIVKOU NA INTERVALU 0 až 2π.

$\varphi'(t)$ $x = t - \sin t$

$\varphi(t)$ $y = 1 - \cos t$

Poznámka: φ fí

VZOREC

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(t-\sin t)'\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1-\cos t-\cos t+\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1-2\cos t+\underbrace{\cos^2 t}_{\text{NYNÍ SPOČÍTÁM ZVLÁŠŤ}}\,dt =$$

GONIOMETRICKÁ FUNKCE V SUDÉ MOCNINĚ, PROTO POUŽIJI PER PARTES

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \cos t \cdot \cos t \, dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \cos t & u' = -\sin t \\ v' = \cos t & v = \sin t \end{vmatrix} =$$

$$= \cos t \cdot \sin t - \int -\sin t \cdot \sin t \, dt =$$

$$= \cos t \cdot \sin t + \int \sin t \sin t \, dt =$$

$$= \cos t \cdot \sin t + \int \sin^2 t \, dt =$$

$$= \cos t \cdot \sin t + \int 1 - \cos^2 t \, dt =$$

$$= \cos t \cdot \sin t + t - \int \cos^2 t \, dt$$

$$\int \cos^2 t \, dt = \cos t \sin t + t - \int \cos^2 t \, dt \quad / + \int \cos^2 t \, dt$$

$$2 \int \cos^2 t \, dt = \cos t \sin t + t$$

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{\cos t \sin t + t}{2}$$

$$= \left[t - 2 \sin t + \frac{\cos t \sin t + t}{2} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \left[2\pi - 2 \sin 2\pi + \frac{\cos 2\pi \sin 2\pi + 2\pi}{2} - 0 \right] =$$

$$= 2\pi - 0 + \frac{2\pi}{2} = 2\pi + \pi = \underline{3\pi \, j^2}$$

NĚJAKÝCH JEDNOTEK ČTVEREČNÝCH

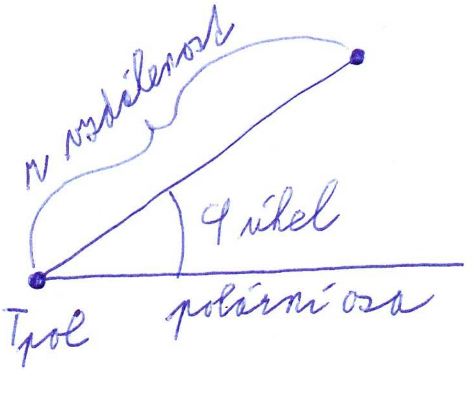
SOUŘADNICE POLÁRNÍ

KDYŽ URČUJI POLÁRNÍ SOUŘADNICE NĚJAKÉHO BODU NA PŘÍMCE, TAK VYCHÁZÍM Z TOHO, ŽE MÁM NĚJAKÝ BOD, KTERÉMU SE ŘÍKÁ T_{POL}, PAK MÁM NĚJAKOU POLÁRNÍ OSU. JESTLIŽE MÁM TEĎ NĚJAKÝ LIBOVOLNÝ BOD V ROVINĚ, TAK TO UDÁVAJÍ DVĚ VĚCI:

- <u>ÚHEL</u>, KTERÝ SVÍRÁ TATO ÚSEČKA
- <u>VZDÁLENOST</u>

TÍM JSOU UDANÉ SOUŘADNICE TOHO BODU

(U PARAMETRICKÝ SOUŘADNIC BYLO: SOUŘADNICE $[x, y]$, U POLÁRNÍCH SOUŘADNIC UDÁVÁME: ÚHEL a VZDÁLENOST)



Ř:

KŘIVKA JE ZADANÁ $r = \varphi$

ÚHEL BĚŽÍ OD NULY DO 2π $\quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$

CHTĚL BYCH URČIT OBSAH PLOCHY MEZI TOUTO KŘIVKOU A POLÁRNÍ OSOU (OBSAH PLOCHY POD TOU KŘIVKOU)

JAK TATO KŘIVKA VYPADÁ?

PŘEDPIS UDÁVÁ JAKOBY VZDÁLENOST TOHO BODU NA TÉ KŘIVCE O TÝ POLÁRNÍ OSE.

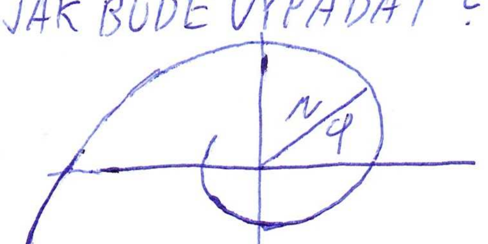
PŘEDSTAVIT SI: KDYBYCH MĚL ÚHEL $\frac{\pi}{2}$, JAK BUDE VZDÁLENÝ TEN BOD NA TÉ OSE OD POČÁTKU U TÉTO KŘIVKY?
TEN PŘEDPIS UDÁVÁ DÉLKU MEZI DVĚMA BODAMA.

ZVOLÍM SI ÚHEL fí A TEN PŘEDPIS MI ŘEKNE VZDÁLENOST.

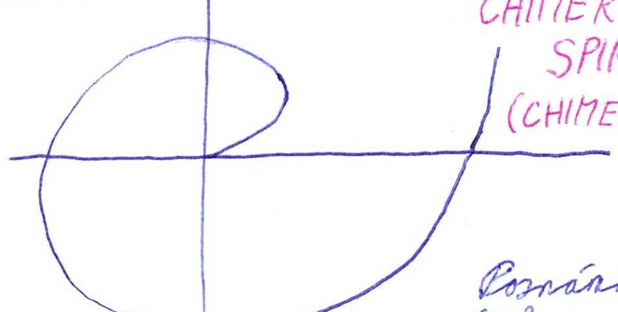
úhly v radiánech	φ	0	$\frac{\pi}{2}$	3π	4π
vzdálenosti	$r = \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	3π	4π

TEĎ VÍM Z PŘEDPISU, ŽE r SE ROVNÁ φ. CO TO ZNAMENÁ? ŽE TO BUDE VŽDY STEJNÉ. ÚHEL V RADIÁNECH JE STEJNÝ JAKO VZDÁLENOST OD TOHO T_{POLU}. KDYŽ SE ZVĚTŠUJE ÚHEL, ZVĚTŠUJE SE VZDÁLENOST.

JAK BUDE VYPADAT?



křivka: CHIMÉROVA SPIRÁLA (CHIMERA SPIRAL)



Poznámka jako u šneka

VZOREC PRO SPIRÁLU

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi}$$

Pozn.: $r^2 \Rightarrow \varphi^2$

INTEGRÁL ŘÍKÁ: VEZMI SI NĚJAKOU FUNKCI r PROMĚNNÉ φ A KDYŽ CHCI SPOČÍTAT OBSAH φ PLOCHY ODPOVÍDAJÍCÍ, CO S TOU FUNKCÍ MUSÍME UDĚLAT? DÁT JI NA DRUHOU, TAKŽE JE TO φ^2

VZOREC ŘÍKÁ: VEM FUNKCI, UMOCNI JI NA DRUHOU A ZINTEGRUJI TO. NAŠE FUNKCE JE φ, TO ZNAMENÁ ŽE JI MÁME DÁT NA DRUHOU A DOSTANU φ^2.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2\pi)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{(2\pi)^3}{6} = \frac{8\pi^3}{6} =$$

$$= \frac{4\pi^3}{3} = \underline{\underline{41{,}3\ j^2}}$$

MILAN MROCZKOWSKI
YESIT.CZ
SATA150@GMAIL.COM