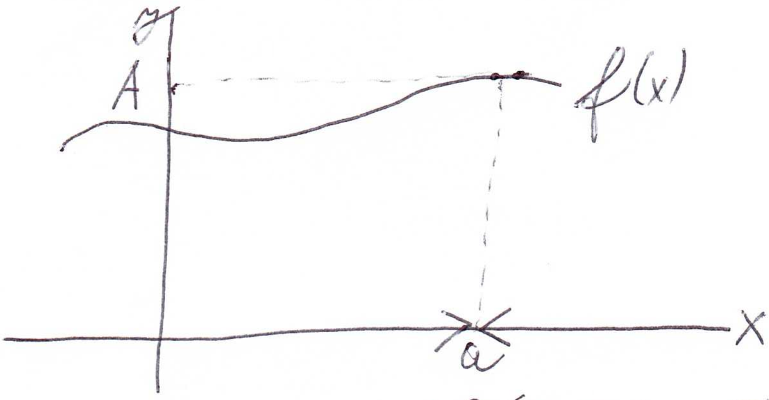
# LIMITY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

OPAKOVÁNÍ: LIMITA FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ
(PŘEDSTAVA)

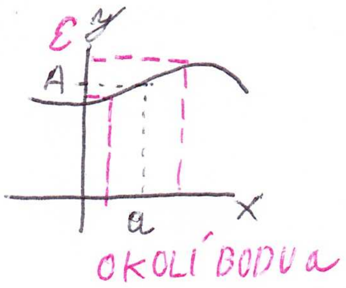



BLÍŽÍM SE K $a$ ZLEVA NEBO ZPRAVA.

FUNKCE $f$ MÁ V BODĚ $\underline{a}$ LIMITU $\underline{A}$

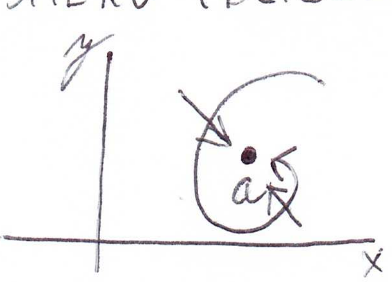
$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

LIMITA FUNKCE $f$ PRO $x$ BLÍŽÍCÍ SE K $a$ JE ROVNA $\underline{A}$




## FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

MŮŽEME SE BLÍŽIT VÍCE ZPŮSOBY - BLÍŽÍME SE Z RŮZNÝCH SMĚRŮ (BLÍŽENÍ ZLEVA A ZPRAVA JAKOBY NAHRAZUJI)




BUDU PRACOVAT S POSLOUPNOSTMI

$$\forall X_n \quad X_n \to a \Rightarrow f(X_n) \to A$$

$$\{x_n, y_n\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{n+3}{n^2}\right\}$$

POPISUJE JAK SE CHOVÁ x-OVÁ SOUŘADNICE

POPISUJE JAK SE CHOVÁ y-OVÁ SOUŘADNICE

PŘÍKLAD: $\boxed{\lim\limits_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}}$

LIMITA SE ZÍSKÁ TAK, ŽE SE VEZME NĚJAKÁ POSLOUPNOST BODŮ, KTERÁ JDE K BODU [2,4], TU POSLOUPNOST TAM DOSADÍM A TO ČÍSLO CO MI VYJDE BYCH CHTĚL PROHLÁSIT LIMITOU TÉ DANÉ FUNKCE.

DOKÁZAL BYCH VYMYSLET NĚJAKOU POSLOUPNOST KTERÁ PŮJDE KE DVOJCE? UDĚLÁME NĚJAKOU NEKONEČNOU.

$$x_n = 2 - \frac{1}{n}$$

KDYŽ $n$ PŮJDE DO NEKONEČNA, TAK $\frac{1}{n}$ JDE K NULE, $2-0=2$, TAHLE POSLOUPNOST JDE KE DVOJCE.

POTŘEBUJI JEŠTĚ VYMYSLET NĚJAKOU POSLOUPNOST, KTERÁ PŮJDE KE ČTYŘCE.

$$y_n = 4 + \frac{1}{n}$$

DO TÉ LIMITY TEĎ DOSADÍM ZA $x$ TO $x_n$, ZA $y$ TO $y_n$ A SPOČÍTÁM TU LIMITU.

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}+2\cdot\left(4+\frac{1}{n}\right)}{2\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)+4+\frac{1}{n}} =$$

NA JAKOU LIMITU MI TATO LIMITA, KTERÁ SE TÝKALA FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH PŘEJDE? NA LIMITU JEDNÉ PROMĚNNÉ, NAVÍC TO ŘEŠÍ POSLOUPNOST. $(n \to \infty)$

TO CO MI VYJDE PROHLÁSÍM ŽE BY ASI MOHLO BÝT LIMITOU TÉ NAŠÍ FUNKCE.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}+8+\frac{2}{n}}{4-\frac{2}{n}+4+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10+\frac{1}{n}}{8-\frac{1}{n}} = \frac{10}{8} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$

TO ZNAMENÁ, ŽE PRVNÍ ODHAD JE ŽE TA LIMITA TÉTO FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH SE BUDE ROVNAT $\frac{5}{4}$.

$$\boxed{\lim_{[x,y]\to[0,2]} \frac{\sqrt{x+(y-2)^2+1}-1}{x+(y-2)^2}} =$$

LIMITA, KDY DVOJCE $x, y$ JDE K BODU $[0,2]$ ZE ZLOMKU...

PRVNÍ ZKUSÍM DOSADIT

$$= \left[ \frac{\sqrt{0+(2-2)^2+1}-1}{0+(2-2)^2} = \frac{0}{0} \right] =$$

LIMITA VYŠLA NULA DĚLENO NULOU, TADY PŘEDPOKLAD O TOM ŽE FUNKCE JE SPOJITÁ POBLÍŽ NEJDE, PROTOŽE TAM LIMITA NENÍ DEFINOVANÁ - VYŠEL NEURČITÝ VÝRAZ.

VZPOMENOUT: JAK SE U FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ
PRACOVALO S ODMOCNINAMA?
- ROZŠÍŘILI ODMOCNINOU NA DRUHOU
A MUSÍ TAM BÝT PLUS $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,2]} \frac{\sqrt{x+(y-2)^2+1}-1}{x+(y-2)^2} \cdot \frac{\sqrt{x+(y-2)^2+1}+1}{\sqrt{x+(y-2)^2+1}+1} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,2]} \frac{x+(y-2)^2+1-1}{[x+(y-2)^2](\sqrt{x+(y-2)^2+1}+1)} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,2]} \frac{\cancel{x+(y-2)^2}}{\cancel{[x+(y-2)^2]}\cdot(\sqrt{x+(y-2)^2+1}+1)} = \lim_{[x,y]\to[0,2]} \frac{1}{\sqrt{x+(y-2)^2+1}+1} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

PROČ ŠLO V PŘÍKLADU ZKRÁTIT (VIZ NÍŽE)?

$$\lim_{[x,y]\to[0,2]} \frac{x+(y-2)}{[x+(y-2)^2]\cdot(\sqrt{x+(y-2)^2+1}+1)}$$

KDYBYCH TADY DOSADIL:

$$\frac{0+(2-2)}{[0+(2-2)^2]\cdot(\sqrt{0+(2-2)^2+1}+1)} =$$

$$= \frac{\cancel{0}}{\cancel{0}\cdot(\sqrt{0+(2-2)^2+1}+1)}$$

$\Downarrow$

PROČ TO LZE "TOTO"?

PROTOŽE POČÍTÁM LIMITU V BODĚ [0,2], TEDY PRACUJI S ČÍSLY KTERÁ JSOU HROZNĚ BLÍZKÁ BODU [0,2], ALE V BODĚ [0,2] TO NEMŮŽE BÝT, TO ZNAMENÁ, ŽE MI NEVYJDE NIKDY NULA, JE TO PROSTĚ MALINKÉ ČÍSLO BLÍZKÉ NULE A POTOM MŮŽU ZKRÁTIT. LIMITA: : PRACUJI SE VŠÍM CO JE HROZNĚ BLÍZKO, ALE NIKDY S TÍM BODEM, PROTO JE KRÁCENÍ POVOLENO.

$$\boxed{\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}} =$$

PRVNÍ ZKUSÍM DOSADIT

NEURČITÝ VÝRAZ

$$= \left[\frac{-1\cdot 0+2\cdot(-1)+0+2}{-1\cdot 0^2+0^2+(-1)+1} = \frac{0}{0}\right] =$$

VYTKNUTÍ – NEPOUŽIJI:

$$\left( = \frac{x\left(y+2+\frac{y}{x}+\frac{2}{x}\right)}{x\left(y^2+\frac{y^2}{x}+1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1\left(0+2+\frac{0}{-1}+\frac{2}{-1}\right)}{-1\left(0^2+\frac{0^2}{-1}+1+\frac{1}{-1}\right)} = \frac{2+(-1)\cdot(-2)}{-1+(-1)\cdot(-1)} = \frac{0}{0}\right)$$

TOHLE VYTÝKÁNÍ FUNGUJE KDY? KDYŽ SE TO BLÍŽÍ K NEKONEČNU, TAK VŠECHNY PODÍLY PŮJDOU K NULE.

JAK VYTKNU TADY?

$$= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{x(y+2)+1\cdot(y+2)}{y^2(x+1)+1\cdot(x+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(y+2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(y^2+1)} =$$

$$= \frac{(0+2)}{(0^2+1)} = \underline{\underline{2}}$$

MILAN MROCZKOWSKI
SATA150@GMAIL.COM
YESIT.CZ

$$\boxed{\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y}{x}} =$$

ZKUSÍM TO PŘES POSLOUPNOSTI, ZVOLÍM SI NĚJAKOU POSLOUPNOST KTERÁ JDE K BODU [0,0] UDĚLÁM SI MINIMÁLNĚ ALESPOŇ 1 ODHAD JAK BY TO MOHLO VYJÍT.

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\left[\frac{y}{x}\right]$$

PRVNÍ ODHAD JE, ŽE TA LIMITA SE ROVNÁ JEDNÉ.
ABYCHOM DOKÁZALI ŽE TO JEDNIČKA JE, TAK TO MUSÍME UKÁZAT PRO VŠECHNY POSLOUPNOSTI, KTERÉ K TOMU BODU [0,0] JDOU.
UKÁZAT JINOU POSLOUPNOST KTERÁ JDE K BODU [0,0]:

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

$$y_n = \frac{1}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

ZASE BYLI OBĚ POSLOUPNOSTI STEJNÉ, VYMYSLET JINÝ PŘÍPAD, ABY OBĚ POSLOUPNOSTI NEBYLI STEJNÉ:

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{1}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

PRO TUHLE POSLOUPNOST MI VYŠLA LIMITA 0, CO JE SPRÁVNĚ? FUNKCE BY MĚLA LIMITU TEHDY, KDYBY PRO KAŽDOU POSLOUPNOST, JAKOUKOLIV KTEROU SI ZVOLÍM, TAK MI VYŠEL VŽDY STEJNÝ VÝSLEDEK.

MĚ VYŠEL JINÝ VÝSLEDEK NEŽ PŘEDCHOZÍ, TAK O TÉTO FUNKCI ŘEKNU ŽE NEMÁ LIMITU. NEVÍM CO BY TO MĚLO BÝT (NULA NEBO JEDNIČKA), TAHLE FUNKCE LIMITU NEMÁ.

ZADÁNÍ

$$\boxed{\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2x\cancel{y}}{x^2+y^2}} =$$

UKAŽ, ŽE TATO FUNKCE V BODĚ [0,0] LIMITU NEMÁ, TEDY: NAJÍT TAKOVÉ DVĚ POSLOUPNOSTI ABY TA LIMITA VYŠLA JINAK.

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = 1$$

V POSLOUPNOSTI MOHU MĚNIT ZNAMÉNKO, MÍSTO JEDNIČKY MOHU DÁT DVOJKU, TROJKU, ... MŮŽEME MĚNIT MOCNINU U $n$. ATD., ALE DALŠÍ VARIANTY JSOU SLOŽITĚJŠÍ NA VÝPOČET.

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{1}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n^2}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3} : \left(\frac{n^2+1}{n^4}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}\cdot\frac{n^4}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(2)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0$$

Potvrdilo se že: ZADÁNÍ: TAHLE FUNKCE LIMITU NEMÁ

$$\boxed{\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}} =$$

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1+n^2}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n^4}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{1}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n^2}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1+1}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^4}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

# PARCIÁLNÍ DERIVACE

POKUD MÁM FUNKCI DVOU PROMĚNNÝCH A CHTĚL BYCH SPOČÍTAT DERIVACI, TAK UŽ MI NENÍ JASNÝ PODLE KTERÉ PROMĚNNÉ BYCH MĚL DERIVOVAT => PROTO POUŽÍVÁM PARCIÁLNÍ DERIVACE

(PARCIÁLNÍ DERIVACE PODLE PROMĚNNÉ $x$, PARCIÁLNÍ DERIVACE PODLE PROMĚNNÉ $y$)

(FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH $x$ A $y$ JE DANÁ JAKO $x^3y+4y-2y^3$)

PŘÍKLAD: $\boxed{f(x,y)=x^3\cdot y+4yx-2y^3}$ CHCI SPOČÍTAT PARCIÁLNÍ DERIVACI PODLE DVOU PROMĚNNÝCH

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y+4y-(2y^3)'=$$

$y$ JE CHÁPÁNO JAKO KONSTANTA, PROTOŽE DERIVUJI PODLE $x$.

$$=3x^2y+4y$$

POZNÁMKA:

$$(\underbrace{4y}_{C}\cdot x)'=4y \qquad (C)'=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^3+4x-6y^2$$

YESIT.CZ MILAN MROCZKOWSKI SATA150@GMAIL.COM

$$\boxed{f(x,y) = x^y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,x^{y-1}$$

$y$ JE KONSTANTA

POZNÁMKA: $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$

x JE KONSTANTA

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \cdot (x)'$ $\left[(2^y)' = 2^y \ln 2 \cdot (y)'\right]$

($a$ JE KONSTANTA)

$$\boxed{f(x,y) = x\sqrt[3]{y} + \frac{y^2}{\sqrt{x}}} = x \cdot y^{\frac{1}{3}} + y^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{\frac{1}{3}} + y^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\frac{1}{3}\,y^{-\frac{2}{3}} + 2y\,x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f(x,y) = \ln(x + \ln y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x + \ln y} \cdot (x + \ln y)' =$$

$$= \frac{1}{x + \ln y} \cdot \left[ (x)' + (\ln y)' \right] =$$

$$= \frac{1}{x + \ln y} \cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x + \ln y} \cdot (x + \ln y)' =$$

$$= \frac{1}{x + \ln y} \left[ (x)' + (\ln y)' \right] =$$

$$= \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot (y)' =$$

$$= \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1$$

# FUNKCE O TŘECH PROMĚNNÝCH

$$\boxed{f(x,y,z) = 3x^2 + \frac{x-y}{x+y} - e^{x-2y+3z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + \frac{(x-y)' \cdot (x+y) - (x-y) \cdot (x+y)'}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z} \cdot (x-2y+3z)' =$$

$$= 6x + \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z} \cdot 1 =$$

$$= 6x + \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x-y)' \cdot (x+y) - (x-y)(x+y)'}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z} \cdot (x-2y+3z)' =$$

$$= \frac{-1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z} \cdot (-2) =$$

$$= \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z} \cdot (-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -e^{x-2y+3z} \cdot (x-2y+3z)' =$$

$$= -e^{x-2y+3z} \cdot 3$$

$$f(x,y) = \cos\frac{x^2}{y} = \cos(x^2 \cdot y^{-1})$$

SPOČÍTEJ PARCIÁLNÍ DERIVACI PODLE OBOU PROMĚNNÝCH V BODĚ $\frac{\pi}{2}$ A 1.

$\left[\frac{\pi}{2}, 1\right]$ = SOUŘADNICE BODU.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x^2 \cdot y^{-1}) \cdot (x^2 \cdot y^{-1})' =$$

$$= \underline{-\sin(x^2 \cdot y^{-1}) \cdot 2x \cdot y^{-1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x^2 \cdot y^{-1}) \cdot (x^2 \cdot y^{-1})' =$$

$$= -\sin(x^2 \cdot y^{-1}) \cdot x^2 \cdot (-1 y^{-2}) =$$

$$= \underline{-\sin(x^2 \cdot y^{-1}) \cdot x^2 \cdot (-1)\, y^{-2}}$$

DOSAZUJI

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\left[\frac{\pi}{2}, 1\right]\right) = \underline{-\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 1^{-1}\right] \cdot 2\,\frac{\pi}{2} \cdot 1^{-1}}$$

DOSAZUJI

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\left[\frac{\pi}{2}, 1\right]\right) = \underline{-\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 1^{-1}\right] \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (-1) \cdot 1^{-2}}$$

# PARCIÁLNÍ DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

STEJNĚ JAK SE DERIVUJÍ FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ, LZE DERIVOVAT FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

POKUD MÁM FUNKCI: $f(x,y)$

TAK VÍM, JAK SPOČÍTAT PARCIÁLNÍ DERIVACI PODLE $x$ A PARCIÁLNÍ DERIVACI PODLE $y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

KDYŽ BUDU POČÍTAT DERIVACE ŘÁDU DRUHÉHO, TAK TĚCH MOŽNOSTÍ JE VÍCE

MŮŽU VZÍT PARCIÁLNÍ DERIVACI FUNKCE $f$ PODLE $x$ A JEŠTĚ ZNOVU ZDERIVOVAT PODLE $x$ A UDĚLAT PARCIÁLNÍ DERIVACI DRUHÉHO ŘÁDU FUNKCE $f$ PODLE PROMĚNNÉ $x$, PODLE PROMĚNNÉ $x$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ (TEDY, ZNOVU ZDERIVUJI $\frac{\partial f}{\partial x}$ PODLE $x$)

NEBO MŮŽEME VZÍT PARCIÁLNÍ DERIVACI PODLE $x$ ZNOVU, ALE TENTOKRÁT TO CO VYJDE ZDERIVOVAT PODLE $y$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

DALŠÍ MOŽNOSTÍ JE DERIVACE PODLE $y$, PAK JI ZDERIVOVAT PODLE $x$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

VEZMU PARCIÁLNÍ DERIVACE PODLE $y$ A JEŠTĚ JEDNOU JI ZDERIVUJI PODLE $y$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

MÁM 4 JEDNOTKY JAK SPOČÍTAT PARCIÁLNÍ DERIVACI DRUHÉHO ŘÁDU.

$$\boxed{f(x,y) = x^3 y + 4xy - 2y^3}$$

CHCI SPOČÍTAT PARCIÁLNÍ DERIVACI DRUHÉHO ŘÁDU

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + 4y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underline{\underline{6xy}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4x - 6y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underline{\underline{-12y}}$$

SMÍŠENÉ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{\underline{3x^2 + 4}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \underline{\underline{3x^2 + 4}}$$

$$\boxed{f(x,y) = \sin(x \cdot y)}$$ CHCI PARCIÁLNÍ DERIVACI DRUHÉHO ŘÁDU

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xy) \cdot (xy)' =$$
$$= \cos(xy) \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy) \cdot (xy)' =$$
$$= \cos(xy) \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(xy) \cdot (xy)' \cdot y + \cos(xy) \cdot (y)' =$$
$$= -\sin(xy) \cdot y \cdot y + \cos(xy) \cdot 0 =$$
$$= \underline{-\sin(xy) \cdot y^2 + \cos(xy) \cdot 0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(xy) \cdot (xy)' \cdot x + \cos(xy) \cdot (x)' =$$
$$= -\sin(xy) \cdot x \cdot x + \cos(xy) \cdot 0 =$$
$$= \underline{-\sin(xy) \cdot x^2 + \cos(xy) \cdot 0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(xy) \cdot (xy)' \cdot y + \cos(xy) \cdot (y)' =$$
$$= \underline{-\sin(xy) \cdot x \cdot y + \cos(xy) \cdot 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = -\sin(xy) \cdot (xy)' \cdot x + \cos(xy) \cdot (x)' =$$
$$= -\sin(xy) \cdot y \cdot x + \cos(xy) \cdot 1$$

SMÍŠENÉ PARCIÁLNÍ DERIVACE VYŠLI STEJNĚ, POKUD JSOU FUNKCE SPOJITÉ, TAK SE MUSÍ ROVNAT.

$$\boxed{f(x,y) = e^{x^2 y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2 y} \cdot (x^2 y)' =$$
$$= e^{x^2 y} \cdot 2yx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^2 y} \cdot (x^2 y)' \cdot 2yx + e^{x^2 y} \cdot (2yx)' =$$
$$= e^{x^2 y} \cdot (2xy) \cdot 2yx + e^{x^2 y} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2 y} \cdot (x^2 y)' =$$
$$= e^{x^2 y} \cdot x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^2 y} \cdot (x^2 y)' \cdot x^2 + e^{x^2 y} \cdot (x^2)' =$$
$$= e^{x^2 y} \cdot (x^2) \cdot x^2 + e^{x^2 y} \cdot 0 =$$
$$= e^{x^2 y} \cdot x^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x^2 y} \cdot (x^2 y)' \cdot 2yx + e^{x^2 y} \cdot (2yx)' =$$
$$= e^{x^2 y} \cdot x^2 \cdot 2yx + e^{x^2 y} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x^2 y} \cdot (x^2 y)' \cdot x^2 + e^{x^2 y} \cdot (x^2)' =$$
$$= e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot x^2 + e^{x^2 y} \cdot 2x$$

$$\boxed{f(x,y) = 2xe^y + 3ye^x}$$

VYPOČÍTAT PARCIÁLNÍ DERIVACI 4. ŘÁDU PODLE:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y\,\partial x\,\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2xe^y)' + (3ye^x)' =$$

$$= 2x\,e^y \cdot (y)' + 3e^x \cdot 1 =$$

$$= 2x\,e^y \cdot 1 + 3e^x =$$

$$= 2xe^y + 3e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = (2xe^y)' + (3e^x)' =$$

$$= 2e^y + 3e^x \cdot (x)' =$$

$$= 2e^y + 3e^x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial x} = (2e^y)' + (3e^x)' =$$

$$= 3e^x \cdot (x)' =$$

$$= 3e^x$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y\,\partial x\,\partial x\,\partial y} = (3e^x)' =$$

$$= \underline{0}$$

URČI VŠECHNY PARCIÁLNÍ DERIVACE 4. ŘÁDU TÉ FUNKCE, KOLIK BYCH JÍ BYLO?

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y\, \partial x\, \partial x\, \partial y}$$

SEM MŮŽU DÁT $y$ A $x$

$x\,y \quad x\,y \quad x\,y \quad x\,y$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ 16 MOŽNOSTÍ JAK DERIVACE SPOČÍTAT