

SLOVNÍ ÚLOHY

YESIT.CZ
MILAN MROČKOWSKI
SATA150@GMAIL.COM

ZADÁNÍ:

REKLAMNÍ KAMPAŇ NA NOVÝ VÝROBEK SE ZAMĚŘUJE NA 1 MILION OBYVATEL, RYCHLOST ŠÍŘENÍ ZNALOSTI O VÝROBKU JE PŘÍMO ÚMĚRNÁ POČTU OBYVATEL, KTERÍ O VÝROBKU NESLYŠELI. ZA DVA MĚSÍCE O VÝROBKU VÍ 300 000 OBYVATEL. KOLIK OBYVATEL BUDE VÝROBEK ZNÁT ZA ROK?

(BUDU ŘEŠIT DIFERENCIALNÍ ROVNICI)

① SESTAVIT DIFERENCIALNÍ ROVNICI

ROVNICE BY MĚLA ODPOVÍDAT SKUTEČNOSTI, ŽE **VIZ ZADÁNÍ**. POTŘEBUJI SEM DOSTAT DERIVACI. POKUD SLYŠÍM ZMĚNU, RYCHLOST, TAK TO NÁM VYJADRŮJE DERIVACE.

RYCHLOST ŠÍŘENÍ ZNALOSTI O VÝROBKU TO BUDE NAŠE DERIVACE

CO BUDE NAŠE NEZNÁMÁ? TA FUNKCE, CO TO BUDE ZA FUNKCI? FUNKCE BUDE ZÁVISET NA ČASE. CO NÁM BUDE UDÁVAT? KOLIK OBYVATEL BUDE VÝROBEK ZNÁT ZA ROK - POTŘEBUJI PŘEDPOVĚDĚT JAK NA TOM ČASE BUDE ZÁVISET TEN POČET OBYVATEL, KTERÝ VÝROBEK MAJÍ.

NAŠE FUNKCE $y(t)$

NEBO ZÁVISLOST POČTU OBYVATEL KTERÍ O TOM VÝROBKU VĚDÍ NA ČASE. ČÍM VÍCE ČASU BUDE UBYVAT, TÍM VÍC LIDÍ TEN VÝROBEK BUDE ZNÁT.

FUNKCE VYJADRŮJE ZÁVISLOST POČTU LIDÍ, KTERÝ O TOM VÝROBKU VĚDÍ NA ČASE

RYCHLOST ŠÍŘENÍ ZNALOSTI O VÝROBKU

JE PRAVĚ NAŠE DERIVACE TĚ FUNKCE, MÁ BÝT PŘÍMO ÚMĚRNÁ K POČTU OBYVATEL, KTERÍ O VÝROBKU NESLYŠĚLI.

ZA 2 MĚSÍCE O TOM BUDE VĚDĚT 300 000 LIDÍ, TO JE POČÁTEČNÍ PODMÍNKA.

FUNKCE $y(t)$

POČET OBYVATEL, KTERÝ O TOM VÝROBKU VÍ, ZÁVISLÁ NA TOM ČASE (POČÁTEČNÍ PODMÍNKA)

JAK VYJADRÍM POČET, KTERÝ JEŠTĚ O TOM NEVÍ?

POTŘEBUJI OBECNÝ ZÁPIS $(1000\ 000 - y)$

TA ZMĚNA MÁ BÝT PŘÍMO ÚMĚRNÁ, PROTO PRAVOU STRANOU BUDU NAŠOBIT NĚJAKOU KONSTANTOU, KTERÉ SE ŘÍKÁ KONSTANTA ÚMĚRNOSTI, KTERÁ NĀM JAKOBY BUDE UDAVAT TU ZÁVISLOST, KONSTANTA MUSÍ BÝT Kladná.

$$\underline{y' = k(10^6 - y)} \quad k \dots \text{konstanta}$$

SESTAVIL DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI. COJE TO ZA TYP ROVNICE? SPECIÁLNÍ TYP FUNKCE SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI

DERIVACE y
PODLE ČASU $\frac{dy}{dt} = k \cdot (10^6 - y)$

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot (10^6 - y) \quad | \cdot dt$$

$$dy = k \cdot (10^6 - y) dt \quad | \cdot \frac{1}{(10^6 - y)}$$

$$\frac{dy}{(10^6 - y)} = k dt$$

$$\int \frac{1}{(10^6 - y)} dy = \int k dt$$

$$\int \frac{1}{(10^6 - y)} dy = k \int dt$$

$$\int \frac{1}{(10^6 - y)} dy = k \int 1 dt$$

POZNÁMKA:

$$\int \frac{1}{(10^6 - y)} dy = \left| \begin{array}{l} 10^6 - y = s \\ -1 dy = ds \\ dy = -ds \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{s} \cdot (-ds) = - \int \frac{1}{s} ds =$$

$$= -\ln |s| + C = -\ln |10^6 - y| + C$$

$$-\ln |10^6 - y| + A = kA + B \quad | -A$$

$$-\ln |10^6 - y| = kA + B - A$$

$$-\ln |10^6 - y| = kA + C \quad | \cdot (-1)$$

$$\ln |10^6 - y| = -kA - C$$

$$|10^6 - y| = e^{-kA - C}$$

$$|10^6 - y| = e^{-kA} \cdot e^{-C}$$

$$|10^6 - y| = e^{-kA} \cdot D$$

$$10^6 - y = e^{-kA} \cdot E \quad | -10^6$$

$$-y = e^{-kA} \cdot E - 10^6 \quad | \cdot (-1)$$

$$y = -e^{-kA} \cdot E + 10^6$$

poznámka:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ
DIFERENCIÁLNÍ
ROVNICE

ABYCHOM MĚLI VZTAH JASNĚ DANÝ, TAK SE POTŘEBUJÍ ZBAVIT KONSTANT (E, k).

NYNÍ VYŘEŠIT DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI VZHLEDEM K POČÁTEČNÍM PODMÍNKÁM KTERÉ MÁME, JAKÉ POČÁTEČNÍ PODMÍNKY MÁM? ČAS ZA DVA MĚSÍCE $y(2) = 300\,000$ ABYCH SE ZBAVIL KONSTANT, MUSÍM MÍT VŽDYK TOLIK POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK JAKO JE KONSTANT.
PRO ČAS A ROVEN NULE: $y(0) = 0$

POČÁTEČNÍ PODMÍNKY:

$$y(0) = 0$$

$$y(2) = 300\,000$$

$$E = 10^6$$

$$y = -e^{-kx} \cdot E + 10^6$$

$$0 = -e^{-k \cdot 0} \cdot E + 10^6$$

$$0 = -e^{-k \cdot 0} \cdot 10^6 + 10^6$$

$$0 = -1 \cdot 10^6 + 10^6$$

$$0 = 0$$

$$E = 10^6$$

$$300\,000 = -e^{-k \cdot 2} \cdot E + 10^6$$

$$300\,000 = -e^{-k \cdot 2} \cdot 10^6 + 10^6 \quad | -300\,000$$

$$0 = -e^{-k \cdot 2} \cdot 10^6 + 10^6 - 300\,000 \quad | +10^6 e^{-k \cdot 2}$$

$$10^6 e^{-k \cdot 2} = 10^6 - 300\,000$$

$$e^{-2k} = \frac{10^6 - 300\,000}{10^6}$$

$$e^{-2k} = \frac{700\,000}{1\,000\,000}$$

$$e^{-2k} = \frac{7}{10}$$

JAK SE ŘEŠÍ EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE?

JEDNA MOŽNOST: LOGARITMOVÁNÍM, KDYŽ NEFUNGUJE
NIC JINÉHO (FUNGUJE VŽDY)

DALŠÍ MOŽNOST: UPRAVÍME LEVOU A PRAVOU
STRANU NA SPOLEČNÝ ZÁKLAD

$$\ln e^{-2k} = \ln \frac{7}{10}$$

$$-2k \ln e = \ln \frac{7}{10}$$

$$-2k \cdot 1 = \ln \frac{7}{10}$$

$$\boxed{\ln e = 1}$$

$$-2k = \ln \frac{7}{10} \quad | \cdot (-1)$$

$$2k = -\ln \frac{7}{10}$$

$$k = \frac{-\ln \frac{7}{10}}{2}$$

SPOČÍTÁN: KALKULAČKA

$$k = 0,178$$

DOSADIT:

$$y = -e^{-0,178 \cdot t} \cdot 10^6 + 10^6$$

POPISUJE ZÁVISLOST + OBYVATEL KTERÍ O TOM VÝROBKU
VĚDÍ MA ČASE

JAK ZJEDNODUŠIT ZÁPIS ?

$$y = -e^{-0,178 \Delta} \cdot 10^6 + 10^6$$

$$y = e^{-0,178 \Delta} \cdot (-10^6) + 10^6$$

$$y = 2,71828182846^{-0,178 \Delta} \cdot (-10^6) + 10^6$$

$$y = 0,837^{\Delta} \cdot (-10^6) + 10^6$$

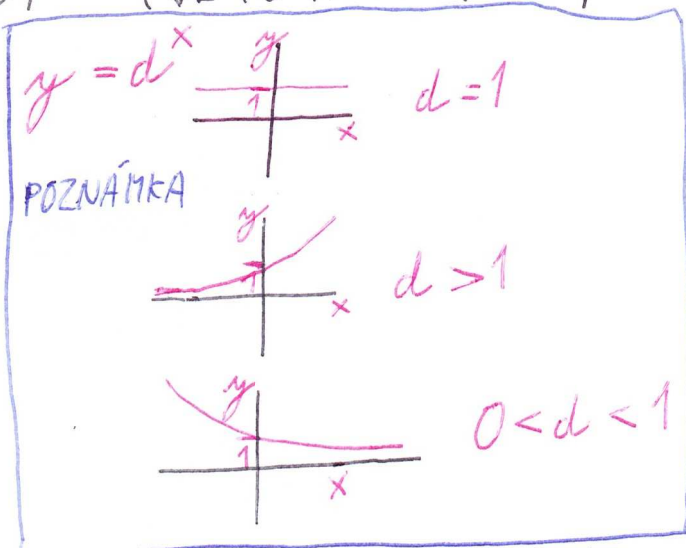
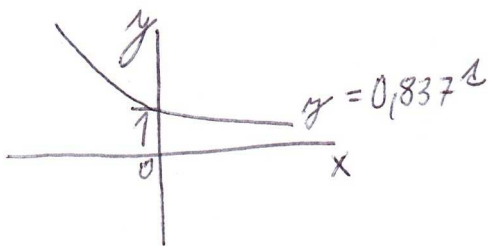
KOLIK LIDÍ BUDE TEN VÝROBEK KTERÝ PROPAGUJEME ZNÁT ZA ROK ?

$$\Delta = 12 \text{ měsíců}$$

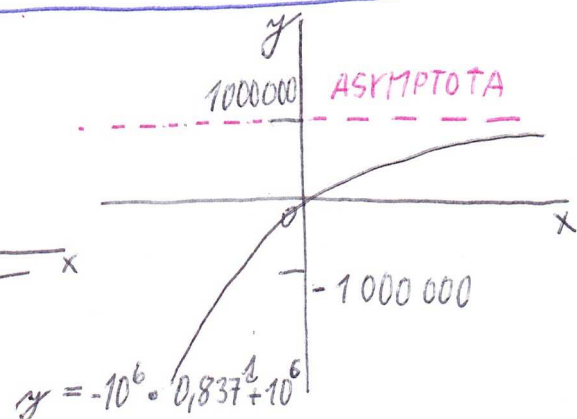
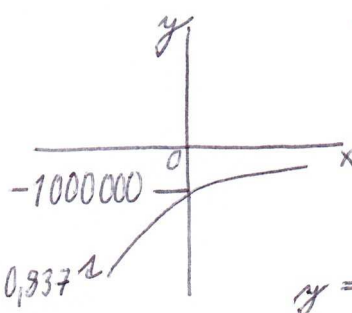
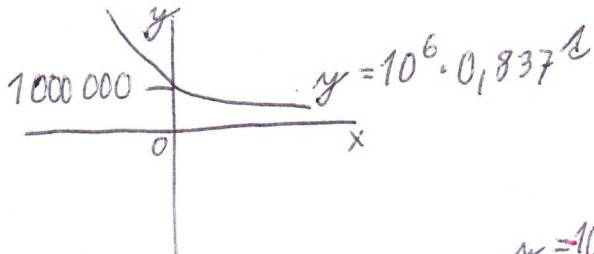
$$y = 0,837^{12} \cdot (-10^6) + 10^6$$

$$\underline{\underline{y = 881776}}$$

NAKRESLIT FUNKCI $y = 0,837^x$ (JE TO JAKO $0,837^x$, TEDK EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE)



VZHLEDEN K TOMU, ŽE PRACUJI S ČASEM, TAK TA ČÁST KTERÁ JE ZÁPORNOU POLOVINOU OSY X, TAK MĚ NEZAVÍMÁ



ZA JAKOU DOBU SE O TOM VÝROBKU DOZVÍ 950 000 LIDÍ?
(VYJÁDRŮM Δ), DOSAZUJI:

$$950\,000 = 10^6 - 10^6 \cdot 0,837^\Delta$$

$$10^6 - 10^6 \cdot 0,837^\Delta = 950\,000 \quad | -10^6$$

$$-10^6 \cdot 0,837^\Delta = 950\,000 - 10^6$$

$$-10^6 \cdot 0,837^\Delta = -50\,000 \quad | \cdot (-1)$$

$$10^6 \cdot 0,837^\Delta = 50\,000 \quad | \cdot \frac{1}{1\,000\,000}$$

$$0,837^\Delta = 0,05$$

$$\ln 0,837^\Delta = \ln 0,05$$

$$\Delta \ln 0,837 = \ln 0,05$$

$$\Delta = \frac{\ln 0,05}{\ln 0,837}$$

$$\underline{\underline{\Delta = 16,8}}$$

ZA 16,8 MĚSÍCŮ

ÚLOHA:

KRUHOVÁ ROPNÁ SKVRNA NA HLADINĚ SE ROZŠÍŘUJE TAK, ŽE POLOMĚR ROSTE RYCHLOSTÍ, KTERÁ JE NEPŘÍMO ÚMĚRNÁ DRUHÉ MOCNINĚ TOHO POLOMĚRU

JAKÁ FUNKCE POPIŠUJE PROCES ZVĚTŠOVÁNÍ ROPNÉ SKVRNY NA HLADINĚ?

(POLOMĚR ROSTE NĚJAKOU RYCHLOSTÍ, TEDY JE TADY ZMĚNA POLOMĚRU, TAK TO MI BUDE VYJADŘOVAT DERIVACÍ)

(TADY NEZNÁMÁ FUNKCE JE JASNÁ - POLOMĚR, POLOMĚR V ZÁVISLOSTI NA ČASE)

① POTŘEBUJI SESTAVIT DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI

VÍM: POLOMĚR ROSTE RYCHLOSTÍ

$r(t)$

JAK ZAPSAT?: NEPŘÍMO ÚMĚRNÁ DRUHÉ MOCNINĚ POLOMĚRU

DIFERENCIÁLNÍ
ROVNICE
SE SEPAROVATELNÝMI
PROMĚNNÝMI

$$r' = k \cdot \frac{1}{r^2}$$

k ... konstanta
úměrnosti

$$\frac{dr}{ds} = k \cdot \frac{1}{r^2} \quad | \cdot ds$$

$$dr = k \cdot \frac{1}{r^2} ds \quad | \cdot r^2$$

$$r^2 dr = k ds$$

$$\int r^2 dr = k \int 1 ds$$

$$\frac{r^3}{3} = kr + C \quad | \cdot 3$$

$$r^3 = 3kr + 3C$$

$$r^3 = 3kr + C$$

$$\underline{\underline{r = \sqrt[3]{3kr + C}}}$$

TATO FUNKCE POPISUJE ZMĚNU POLOMĚRU TĚ ROPNÉ SKVRNY NA ČASE

PODMÍNKY NEBYLI ZADANÉ, ALE I TAK JEDNU DOKÁŽI ŘÍCT. V ČASE NULA, KDY SE STALA HAVÁRIE, TAK TA ROPNÁ SKVRNA MĚLA TAKÉ NULU.

$$r(0) = 0$$

$$0 = \sqrt[3]{3k \cdot 0 + C}$$

$$0 = \sqrt[3]{C}$$

$$0 = C$$

$$\underline{\underline{C = 0}}$$

DRUHÁ PODMÍNKA KTERÁ V ZADAÁNÍ NENÍ:
ZA DVĚ MINUTY POLOMĚR BYL 5 METRŮ.

VYUŽÍVÍ
C=0

$$r(2) = 5$$

$$5 = \sqrt[3]{3k \cdot 2 + 0}$$

$$5 = \sqrt[3]{6k} \quad |^3$$

$$125 = 6k$$

$$125 = 6k$$

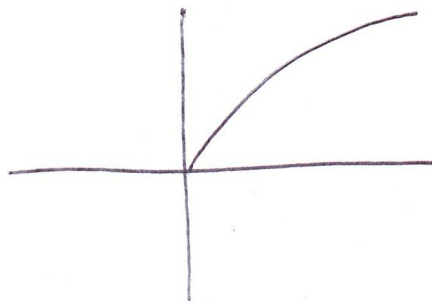
$$\frac{125}{6} = k$$

DOSAZUJI DO $n = \sqrt[3]{3kA+C}$

$$n = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{125}{6} A + 0}$$

$$n = \sqrt[3]{\frac{125}{2} A}$$

JAK BY VYPADAL GRAF TĚTO FUNKCE?



LIMITA TĚTO
FUNKCE V NEKONEČNU
JE NEKONEČNO