POSLOUPNOSTI

CO JE TO POSLOUPNOST?

- FUNKCE Z PŘIROZENÝCH ČÍSEL DO ČÍSEL REÁLNÝCH

ZÁPIS VÝČTEM PRVKŮ

$3, 6, 9, \dots$

$1, 2, 3, 4, \dots$

$10, 20, 30, \dots$

PŘIROZENÉ ČÍSLO NÁM ŘÍKÁ POUZE TO KTERÝ ČLEN JE PRVNÍ, DRUHÝ, DVACÁTÝ, ...

K ČÍSLŮM PŘIROZENÝM 1, 2, 3 atd. PŘIŘAZUJI ČLENY TÉ ŘADY, V TOMHLE PŘÍPADĚ 3, 6, 9

$f: N \to R$

$1 \to 3$

$2 \to 6$

$3 \to 9$

JE TO: - ZOBRAZENÍ Z PŘIROZENÝCH ČÍSEL DO ČÍSEL REÁLNÝCH

ZÁPIS POSLOUPNOSTI POMOCÍ N-TÉHO ČLENU

$\{3n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad (3\cdot 1, 3\cdot 2, 3\cdot 3, \dots)$

$\{n\}_{n=1}^{\infty}$

$\{10n\}_{n=1}^{\infty}$

ZADÁNÍ REKURENTNÍ

ČLEN NÁSLEDUJÍCÍ DOSTANU TAK, ŽE MU PŘIČTU TROJKU. PRVNÍ SI MUSÍM STANOVIT KDE ZAČNU, ČLEN 1. BUDE TROJKA.

$a_1 = 3$

$a_{n+1} = a_n + 3$

POSLOUPNOST UMÍME ZAPSAT ZPŮSOBY:

= VÝČTEM

= N-TÝM ČLENEM

= REKURENTNĚ

TEDY PODLE TOHO JAK SE NÁM TO HODÍ.

CO JE TO LIMITA POSLOUPNOSTI?

JE TO NĚJAKÁ HODNOTA, K ČEMU SE TA POSLOUPNOST BLÍŽÍ

POSLOUPNOSTI UTÍKAJÍCÍ DO NEKONEČNA:

$3, 6, 9, \dots \to \infty$

$1, 2, 3, 4, \dots \to \infty$

$10, 20, 30, \dots \to \infty$

$\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4 \to \infty$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \to 0$ JDE K NULE, POSLOUPNOST KONVERGUJE, PROTOŽE JDE K REÁLNÉMU ČÍSLU.

$1, -1, 1, -1, \dots \to$ NEJDE NIKAM, POSLOUPNOST NEMÁ LIMITU $\Rightarrow$ DIVERGENTNÍ POSLOUPNOST

POSLOUPNOST LIMITU MÁ $\pm\infty$ LIMITU NEMAJÍ } DIVERGENTNÍ POSLOUPNOSTI

REÁLNÉ ČÍSLO } KONVERGUJE POSLOUPNOST

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(n^2+2n+7)} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}\right) = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\infty\cdot\left(1+\frac{2}{\infty}+\frac{7}{\infty}\right)$$

$$\infty\cdot(1+0+0)$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(-n^3+5n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} n^3\left(-1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}\right) = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\infty\cdot(-1+0+0)$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+5}{4n^3+2n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\infty\,(3+0+0)}{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}}{\underset{\infty\cdot(4+0)}{n^3\left(4+\frac{2}{n}\right)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

NEURČITÝ VÝRAZ, JE VÝRAZ, KTERÝ SE NEDÁ SPOČÍTAT, V TOMTO PŘÍPADĚ PODÍL, PROTOŽE NEVÍM KOLIK TO VYJDE, MUSÍM SE HO ZBAVIT: POKUSÍM SE ZKRÁTIT

n^3 ve jmenovateli JE VYŠŠÍ MOCNINA, JMENOVATEL BUDE NABÝVAT ČÍM DÁL VĚTŠÍCH HODNOT, POTÁHNE LIMITU K NEKONEČNU NULE.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1\left(3+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n\left(4+\frac{2}{n}\right)} = \left[\frac{3}{\infty}\right] = \underline{\underline{0}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)(2n-1)}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n-6n+3}{n^2+2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n+3}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overset{1}{\cancel{n^2}}\overset{2\,-\,0\,+\,0}{\left(2-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}}{\underset{1}{\cancel{n^2}}\underset{1\,+\,0\,+\,0}{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{1-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(-1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\infty\cdot(1-0)}{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}}{\underset{1\cdot(-1+0)}{1\left(-1+\frac{1}{n}\right)}} = \left[\frac{\infty}{-1}\right] = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)!+(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}\,[(n+2)+1]}{\cancel{(n+1)!}\,(n+3)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2+1}{(n+3)(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+3)}}{\cancel{(n+3)}(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = \underline{\underline{0}}$$

ZDROJ: MILAN MROCZKOWSKI
YESIT.CZ
SATA150@GMAIL.COM

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!+(2n-1)!}{(2n+1)!-(2n)!}} =$$

$$\left(= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots+(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots-(2n)(2n-1)!} = \right)$$ LZE TÉŽ ZAPSAT

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!+(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!-(2n)(2n-1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n-1)!}\,[(2n+1)(2n)+1]}{\cancel{(2n-1)!}\,[(2n+1)(2n)-(2n)]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n+1}{4n^2+2n-2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n+1}{4n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\,(4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4} =$$

$$= \frac{4}{4} = \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

ROZŠIŘUJI ZLOMEK

ZBAVUJI SE ODMOCNIN DLE VZORCE

$(a-b)(a+b)=(a^2-b^2)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = \underline{\underline{0}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

NEURČITÝ VÝRAZ,
MŮŽE NABÝVAT
JAKÉKOLIV HODNOTY

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2}\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} =$$

VYTÝKÁM
NEJVYŠŠÍ
MOCNINOU

ČÁSTEČNĚ
ODMOCNIT

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}}{\cancel{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}} =$$

ROZŠÍŘIT

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}\right)}{n^2+n-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}\right)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{n} =$$

VYTÝKÁNÍ

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\sqrt{n}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{n^2\cdot\frac{1}{n}}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-n\sqrt{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{\cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}} = \underline{\underline{1}}$$

ZAPAMATUJ SI LIMITU PRO EULEROVO ČÍSLO:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e}$$

$$\left(\underset{\downarrow\atop 1}{1}+\underset{\downarrow\atop \frac{1}{\infty}=0}{\frac{1}{n}}\right)^{n\to\infty}=(1+0)^{\infty}=\underbrace{\left[1^{\infty}\right]}_{\text{NEURČITÝ VÝRAZ}}$$

NEURČITÝ
VÝRAZ

NEVÍME CO TAM MŮŽE NASTAT, MŮŽE UPOZORNIT, ŽE LIMITA PŮJDE K MOCNINÁM EULEROVA ČÍSLA

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+1}=?}$$

LIMITA TYPU ?

$$\left[1^{\infty}\right]$$

PROTO POUŽIJI SUBSTITUCI VŽDY TOHOTO TVARU:
(CHCI MOJI LIMITU UPRAVIT DO TOHOTO TVARU)

$$\lim_{k\to ?}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{?}$$

ZE ZÁVORKY $\left(1+\frac{4}{n}\right)$ SE CHCI DOSTAT NA ZÁVORKU $\left(1+\frac{1}{k}\right)$, VÝPOČET

SUBSTITUCE: (POTŘEBUJI VĚDĚT K ČEMU SE ROVNÁ n)

$$1+\frac{4}{n}=1+\frac{1}{k}$$

$$1+\frac{4}{n}=1+\frac{1}{k}\quad /-1$$

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{k}\quad /\cdot n$$

$$\frac{4n}{n}=\frac{n}{k}$$

$$4=\frac{n}{k}\quad /\cdot k$$

$$4k=\frac{kn}{k}$$

$$4k=n$$

VÝSLEDEK SUBSTITUCE:
$n=4k$

PŘEVÁDÍM TO NA LIMITU KTERÁ MÁ PROMĚNNOU JAKO k.

JESTLIŽE V MOCNINĚ $\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+1}$ VÍM ŽE n JE

$4k$, TAK:

$$\lim_{k\to ?}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{4k+1}$$

PROMĚNNOU n UŽ VŮBEC NEPOTŘEBUJI.

KDYŽ n BĚŽELO V ZADÁNÍ K <u>NEKONEČNU</u>, K ČEMU PŮJDE k?

POKUD VÍM ŽE n je $4k$:

$$n = 4k$$
$$4k = n$$
$$4k = n \quad | : 4$$
$$k = \frac{n}{4} \qquad \left[\frac{\infty}{4}\right] \Rightarrow \infty$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{4k+1}$$

LIMITU JSME PŘEVEDLI NA LIMITU JINOU S PROMĚNNÝMI k.

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{4k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(\overbrace{1+\frac{1}{k}}^{x}\right)^{\overset{a}{4k}+\overset{b}{1}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{VZOREC}\\ x^{a+b} = x^{a}\cdot x^{b}\end{array}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{4k}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1} =$$

$$= \boxed{x^{a\cdot b} = (x^{a})^{b}} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\overset{b}{4}\overset{a}{k}}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{4}}_{(1^{\infty})^{4}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1}}_{\substack{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{1}\\ (1+0)^{1}\\ (1)^{1}}} = e^{4}\cdot 1^{1} = \underline{e^{4}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+9}{n+6}\right)^{2n+3} = ?}$$

MYŠLENKA $\frac{\infty+9}{\infty+6} = \frac{\infty}{\infty}$ MUSÍM PROVÉST JINAK, MYŠLENKA:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{n+6} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+\frac{9}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{6}{n})} = \left(\frac{[1+0]}{[1+0]}\right) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow 1^{2n+3} \Rightarrow [1^{\infty}]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+9}{n+6}\right)^{2n+3} = \lim_{k\to ?}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{?} =$$

$$\frac{n+9}{n+6} = 1+\frac{1}{k} \quad /\cdot k(n+6)$$

$$k(n+9) = k(n+6)+(n+6)$$

$$kn+9k = kn+6k+n+6 \quad /-kn$$

$$9k = 6k+n+6 \quad /-6k$$

$$3k = n+6 \quad /-6$$

$$3k-6 = n$$

$$= \lim_{k\to ?}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2(3k-6)+3} = \lim_{k\to ?}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{6k-9} =$$

$$3k-6 = n \quad /+6$$

$$3k = n+6 \quad /:3$$

$$k = \frac{n+6}{3} = \left[\frac{\infty}{3}\right] = \infty$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{6k-9} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{6k} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-9} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-9} =$$

MYŠLENKA: $\left(\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty}\right)^{6}$

$\left(\left(1 + 0\right)^{\infty}\right)^{6}$

$\left(1^{\infty}\right)^{6}$

$\left(e\right)^{6}$

e^{6}

$$= e^{6} \cdot 1^{-9} = e^{6} \cdot \frac{1}{1^{9}} = e^{6} \cdot \frac{1}{1} = e^{6} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{6}}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n = ?}$$

1) POKUD BYCH POČÍTAL SUBSTITUCI, TAK SE MI kácha NEODEČTOU

2) NENÍ ZDE NEURČITÝ VÝRAZ (1^∞)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}(2-\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}\right)^n = \left[2^\infty\right] = \underline{\underline{\infty}}$$

!

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{4n-5}\right)^n = ?}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{4n-5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}(3-\frac{1}{n})}{\cancel{n}(4-\frac{5}{n})}\right)^n = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^\infty\right] = \underline{\underline{0}}$$

!

PROČ 0? $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ POSLOUPNOST:

$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$

ZMENŠUJE SE K NULE $\Rightarrow$ POSLOUPNOST JDE K NULE

(LIMITA JDOUCÍ K NEKONEČNU, JE ZDE ROVNA NULE)