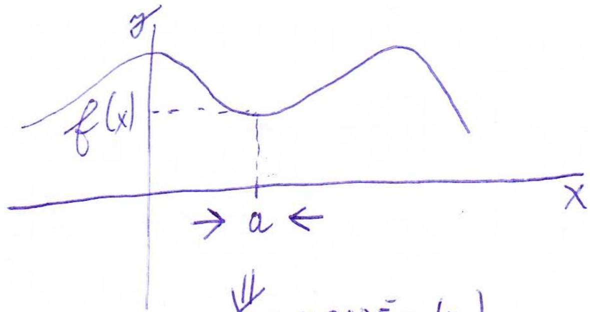
LIMITA FUNKCÍ

JESTLIŽE MÁM NĚJAKOU FUNKCI (SPOJITÁ, NESPOJITÁ), NA OSE X ZVOLÍM NĚJAKÝ BOD, NA NĚHOŽ JE FUNKCE DEFINOVÁNA, TAK ZJIŠŤUJI CO SE STANE KDYŽ SE TOMU BODU X BUDU BLÍŽIT ZLEVA A ZPRAVA, ČEMUŽ ODPOVÍDÁ, ŽE PO TÉ FUNKCI POJEDU K TOMU BODU, ZAJÍMÁ MĚ JESTLI EXISTUJE NĚJAKÁ HODNOTA KE KTERÉ SE FUNKCE BLÍŽÍ. KDYŽ SE BUDU BLÍŽIT K a TAK SE BUDEME BLÍŽIT K FUNKČNÍ HODNOTĚ f(x).

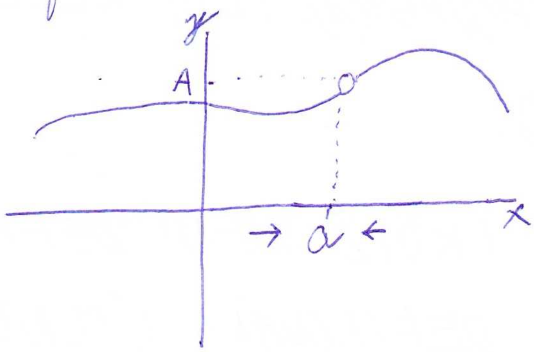


⇓ LIMITA V BODĚ a (x_0) ROVNA FUNKČNÍ HODNOTĚ f(x).

I

LIMITA FUNKCE DEFINOVÁNA V BODĚ a, EXISTUJE FUNKČNÍ HODNOTA f(x)

JESTLIŽE VEZMU JINOU FUNKCI, NEBUDE V NAŠEM BODĚ a definována. FUNKCE JE TADY ○ JAKOBY PŘERUŠENA.



II

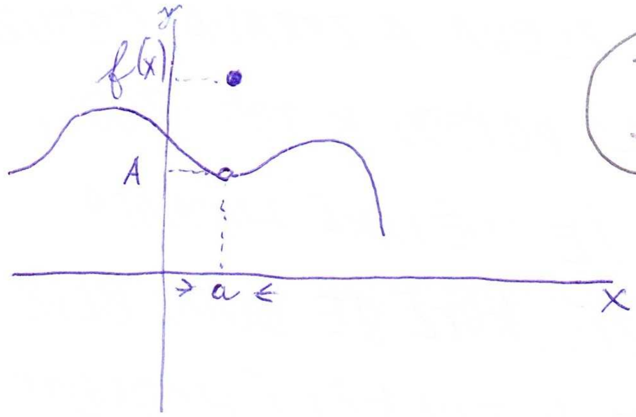
LIMITA FUNKCE NENÍ DEFINOVÁNA V BODĚ a, I TAK HODNOTA A BUDE LIMITOU.

I TAK LIMITU MŮŽU URČIT. CO SE STANE KDYŽ SE K a BUDU BLÍŽIT? EXISTUJE NĚJAKÁ HODNOTA, KE KTERÝ SE PO TÉ FUNKCI PŘIBLÍŽÍM? BYŤ TA FUNKCE TÉTO HODNOTY

NENABÝVÁ ⇒ PRÁZDNÉ KOLEČKO, TAK TAHLE HODNOTA Ⓐ BUDE TOU LIMITOU. NEZÁVISÍ NA TOM ZDA JE TAM TA FUNKCE DEFINOVANÁ ČI NENÍ.

—

FUNKCE MŮŽE VYPADAT I TAKHLE:



Ⅲ

funkční hodnota A nějaké a

LIMITA FUNKCE NENÍ DEFINOVÁNA V BODĚ a

TADY MÁM TO ⓐ A V TOM ⓐ JE FUNKCE DEFINOVANÁ TÍM VYBARVENÝM PUNTÍKEM (f(x)).
KDE BUDE TA LIMITA? LIMITOU BUDE ZASE Ⓐ, PROTOŽE SE FUNKCE BLÍŽÍ SEM, A JE MI JEDNO JAK PŘESNĚ TA FUNKCE V TOM BODĚ DEFINOVANÁ.
MĚ JDE O TO, JAK JE DEFINOVÁNA V OKOLÍ TOHO ⓐ, TO ZNAMENÁ KDYŽ SE K TOMU ⓐ BLÍŽÍM. NEŘEŠÍM TO CHOVÁNÍ ⓐ, TEDY NEŘEŠÍM TENTO KONKRÉTNÍ BOD ⓐ.

FUNKCE MŮŽE MÍT LIMITU I KDYŽ NENÍ DEFINOVÁNA V ⓐ NEBO KDYŽ JE TAM DEFINOVÁNA ÚPLNĚ JINAK.
LIMITA NEZÁVISÍ NA FUNKČNÍ HODNOTĚ V TOM BODĚ Ⓐ. MŮŽE BÝT ÚPLNĚ JINDE.

LIMITY VE VLASTNÍCH BODECH

I

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

FUNKCE JE V NULE DEFINOVÁNA, JINAK BY VYŠLI NEURČITÉ VÝRAZY PO DOSAZENÍ.

DEFINICE SPOJITÁ FUNKCE – FUNKCE JE V NĚJAKÉM BODĚ SPOJITÁ TEHDY, POKUD JE LIMITA V TOM BODĚ x_0 ROVNA FUNKČNÍ HODNOTĚ.

spojitá funkce (kvadratická fce) v nule = podíl je lim spojitý, tedy limita je rovna funkční hodnotě

spojitá funkce

PROTOŽE FUNKCE JE SPOJITÁ, TAK JSME SPOČÍTALI LIMITU TAK, ŽE JSME DOSADILI ⇒ PROTOŽE JE FUNKCE SPOJITÁ, TAK LIMITA MUSÍ BÝT ROVNA FUNKČNÍ HODNOTĚ.

$$\boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}} =$$

II

1. ZKUSÍM DOSADIT, CO KDYBY TO VYŠLO

$$= \left[\frac{9 - 15 + 6}{3^2 - 24 + 15} = \frac{0}{0} \right] =$$

NEURČITÝ VÝRAZ

CO ZNAMENÁ KDYŽ JSEM TROJKU DOSADIL DO ČITATELE A VYŠLA NULA? (VZHLEDEM KE KVADRATICKÉ FCI.)
ŽE TROJKA JE JEDNÍM Z ŘEŠENÍ, PROTO ČITATEL BUDE OBSAHOVAT (x − 3), PROTOŽE 3KA JE ŘEŠENÍM. VE JMENOVATELI TO SAMÉ.

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} =$$

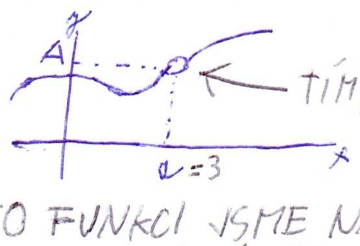
"ČLEN ABSOLUTNÍ": 6TKA V ČITATELI A 15TKA VE JMENOVATELI JE SOUČIN TĚCH KOŘENŮ, JESTLIŽE VÍM, ŽE JEDEN KOŘEN JE 3 A SOUČIN MÁ BÝT 6, TAK TEN DRUHÝ MUSÍ BÝT 2. VE JMENOVATELI VÍM, ŽE SOUČIN KOŘENŮ JE 15 A VÍM ŽE JEDEN JE 3, TO ZNAMENÁ ŽE DRUHÝ MUSÍ BÝT 5TKA.

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x-5} =$$

$$= \frac{3-2}{3-5} =$$

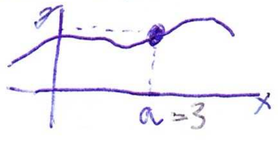
$$= \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

NEŘEŠÍME 3KU, ALE VŠE OKOLO, 3KU ŘEŠIT MÁME ZAKÁZÁNO $\left[\frac{0}{0}\right]$, TEDY NEŘEŠÍME TEN BOD, ALE VŠE OKOLO. DOSAZUJEME TAM NAPŘ: 3,1; 3,2, 3,3; 2,9; 2,8; 2,7. LIMITA NA BODĚ 3 NEZÁVISÍ.



TÍM $\left[\frac{0}{0}\right]$ JSEM VYLOUČIL TEN BOD.

TUTO FUNKCI JSME NAHRADILI FUNKCÍ, KTERÁ UŽ JE DEFINOVANÁ V TROJCE FUNKCÍ SPOJITOU (LIMITA SE ROVNÁ FUNKČNÍ HODNOTĚ)



(VE VÝPOČTU JSME UDĚLALI TUTO ÚPRAVU)

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x+x+2x^2)(1+3x)-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+3x+2x+6x^2+x+3x^2+2x^2+6x^3-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x+11x^2+6x^3}{x} =$$

← CHCI SE ZBAVIT X VE JMENOVATELI

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(6+11x+6x^2)}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} (6+11x+6x^2) =$$

$$= \underline{\underline{6}}$$

UPRAVILI JSME FUNKCI NA SPOJITOU, KVADRATICKOU FUNKCI, KTERÁ UŽ JE V NULE DEFINOVANÁ, TUDÍŽ LIMITA SE ROVNÁ FUNKČNÍ HODNOTĚ

LIMITY V NEVLASTNÍCH BODECH

(VYUŽIJI ZNALOSTI Z LIMIT POSLOUPNOSTÍ -)
(-JAK SE POČÍTÁ)

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4\left(1 - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1 - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)} = \left[\frac{-\infty}{1}\right] = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{x^4\left(1 - \frac{8}{x^2} + \frac{16}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{x\left(1 - \frac{8}{x^2} + \frac{16}{x^4}\right)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = \underline{\underline{0}}$$

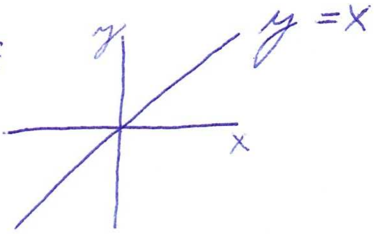
LIMITY KTERÉ OBSAHUJÍ GONIOMETRICKÉ FUNKCE

ZÁKLADNÍ LIMITA:

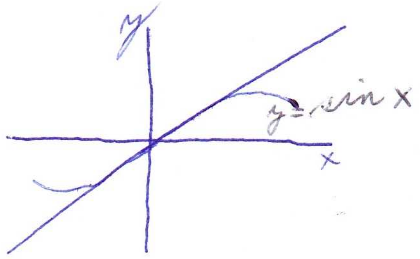
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

PROČ TOTO PLATÍ?

ZNÁME



NAKRESLÍM SINUS:



VZHLEDEM K TOMU ŽE POČÍTÁME LIMITU V NULE, ŽE V BLÍZKU NULY TA FUNKCE SINUS A FUNKCE $y = x$ NÁM DÁVAJÍ STEJNÉ HODNOTY NA NĚKOLIK DESETINÝCH MÍST, ČÍM BLÍŽ JSEM K NULE, TÍM VÍC STEJNÝ JSOU HODNOTY TĚCHTO DVOU FUNKCÍ, TO ZNAMENÁ ŽE U TÉ LIMITĚ JÁ DĚLÍM V PODSTATĚ STEJNÁ ČÍSLA, TAKŽE I KDYŽ HODNOTY PŘETOČÍM TAK SE BUDE LIMITA ROVNAT JEDNÉ.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$$

SINUS NĚJAKÉHO NÁSOBKU x DĚLENO NÁSOBKEM x:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax}}$$

SUBSTITUCE

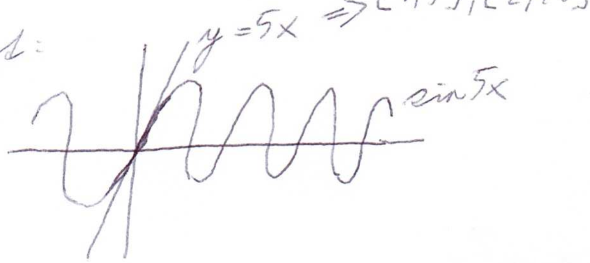
$$ax = y$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}}$$

(náčrt:



$\frac{2\pi}{5x} = 0{,}4\pi$ perioda je kratší)

ROZŠÍŘIT

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{5}{5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5 \overbrace{\sin 5x}^{=1}}{5x} = 5 \cdot 1 = \underline{\underline{5}}$$

$\Rightarrow$ vím $\left[\frac{0}{0}\right]$

V ARGUMENTU SINU

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 17x}{\sin 47x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(17x)}{\sin(47x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 17x}{\sin 47x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 17x}{\sin 47x} \cdot \frac{17x}{17x} \cdot \frac{47x}{47x} =$$

LEPŠÍ ZÁPIS:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(17x) \cdot 17x \cdot 47x}{\sin(47x) \cdot 17x \cdot 47x} = \lim_{x\to 0} \frac{17x \cdot 47x \cdot \sin 17x}{17x \cdot 47x \cdot \sin 47x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 17x}{17x} \cdot \frac{47x}{\sin 47x} \cdot \frac{17x}{47x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{17}{47} = \underline{\underline{\frac{17}{47}}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \cdot \sin x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{x \cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{x \cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{x \cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \sin x}{x \cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 2\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{=1} = \underline{\underline{2}}$$

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$(\sin x)^2 = \sin^2 x$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin x}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}} = \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{x+4}+1} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{x+4-1} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(\sqrt{x+4}+1)}{\cancel{x+3}} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{1(\sqrt{x+4}+1)}{1} =$$

$$= \lim_{x \to -3} (\sqrt{x+4}+1) = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

POZNÁMKA

$$(a-b)\cdot(a+b) = (a^2-b^2)$$

$$(-1)^2 = 1$$

$$-1^2 = -1$$

-1 A TO CELÉ NA DRUHOU

$$(\sqrt{x+4})^2 - (1)^2$$

$$x+4 \quad -1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}} =$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\cdot\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{2^2-(\sqrt{x-3})^2}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}\cdot\frac{-1}{-1}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\cancel{-7+x}}{(-1)\cancel{(x-7)}(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{(-1)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\frac{1}{(-1)(7+7)(2+\sqrt{7-3})}=$$

$$=\frac{1}{(-1)\cdot 14\cdot 4}=-\frac{1}{56}$$

OBOUSTRANÉ LIMITY

JSOU TYPU $[1^\infty]$

$[1^\infty]$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

LÉPE ZAPSAT:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x-2}} =$$

$$= \left\{ \lim_{n \to \infty} \left(\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\,(1)}\right)^{3x-2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1}\right)^{3x-2} = [1^\infty] \right\} =$$

$$= \text{SUBSTITUCE: } \lim_{k \to ?} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^?$$

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{k} \quad / -1$$

$$\frac{x+1}{x} - 1 = \frac{1}{k}$$

$$\frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{k} \quad / \cdot k$$

$$k \cdot \frac{x+1-x}{x} = 1 \quad / \cdot x$$

$$k \cdot (x+1-x) = x$$

$$kx + k - kx = x$$

$$k = x$$

$$x = k$$

K ČEMU PŮJDE k? K ∞ (NEKONEČNU)

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{3k-2} =$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{3k}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-2} =$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{3}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-2} =$$

$$= e^{3}\cdot 1^{-2} =$$

$$= e^{3}\cdot\frac{1}{1^{2}} =$$

$$= e^{3}\cdot\frac{1}{1} = e^{3}\cdot 1 = \underline{\underline{e^{3}}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-4}{x+2} \right)^{2x+1}} =$$

$$= \left\{ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} \right)^{2x+1} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1-\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}} \right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{1} \right)^{\infty} = [1^{\infty}] \right\} =$$

$$= \text{SUBSTITUCE: } \lim_{k \to ?} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{?}$$

$$\frac{x-4}{x+2} = 1 + \frac{1}{k} \quad / -1$$

$$\frac{x-4}{x+2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{(x-4)-(x+2)}{x+2} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{x-4-x-2}{x+2} = \frac{1}{k} \quad / \cdot k$$

$$k \cdot \frac{-6}{x+2} = 1 \quad / \cdot (x+2)$$

$$k \cdot (-6) = x+2 \quad / -2$$

$$-6k - 2 = x$$

$$x = -6k - 2$$

K ČEMU PŮJDE k?

$$x = -6k - 2 \quad / +6k$$
$$6k + x = -2 \quad / -x$$
$$6k = -2 - x \quad / :6$$
$$k = \frac{-2-x}{6} \qquad \left[\frac{-\infty}{6}\right] \Rightarrow -\infty$$

NEBO

$$x = -6k - 2 \quad / +2$$
$$x + 2 = -6k$$
$$\frac{x+2}{-6} = k$$
$$\left[\frac{\infty}{-6}\right] = k$$
$$-\infty = k$$

$$\lim_{k \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2(-6k-2)+1} =$$

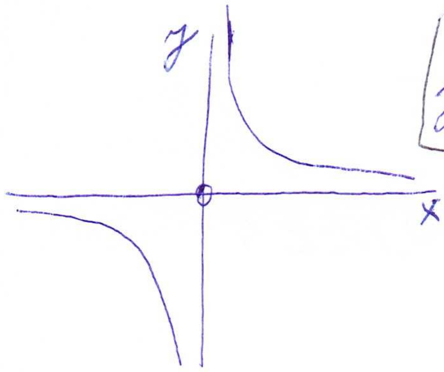
$$= \lim_{k \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-12k-4+1} = \lim_{k \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-12k-3} =$$

$$= \lim_{k \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-12k} \cdot \lim_{k \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-3} =$$

$$= \lim_{k \to -\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{-12} \cdot \lim_{k \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-3} = e^{-12} \cdot 1^{-3} =$$

$$= e^{-12} \cdot \frac{1}{1^3} = \underline{\underline{e^{-12}}}$$

JEDNOSTRANNÉ LIMITY



$$\boxed{y = \frac{1}{x}}$$

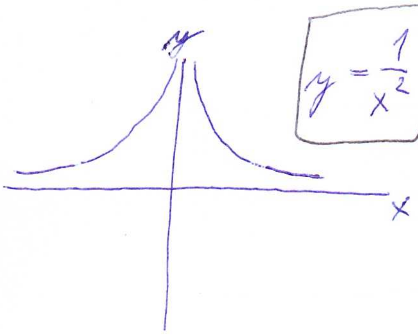
LIMITA OBOUSTRANNÁ NEEXISTUJE,
ALE MÁ OBĚ LIMITY JEDNOSTRANNÉ

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$ NEEXISTUJE LIMITA

$$\xrightarrow{-} \bullet \xleftarrow{+}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



$$\boxed{y = \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

ABY FUNKCE MĚLA LIMITU OBOUSTRANNOU, TAK MUSÍ EXISTOVAT OBĚ JEDNOSTRANNÉ, ALE LIMITY SE MUSÍ ROVNAT, POKUD SE JEDNOSTRANNÉ LIMITY ROVNAJÍ, TAK POTOM MŮŽU ŘÍCT ŽE FUNKCE MÁ LIMITU OBOUSTANNOU.

$$\lim_{x \to 0^+} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to 5^+} \frac{x+2}{x-5}} = +\infty$$

CO DOSAZUJI ZA x ? ČÍSLA O TROCHU VĚTŠÍ NEŽ 5.

$x = 5{,}1$

$$\frac{5{,}1+2}{5{,}1-5} = \frac{7{,}1}{0{,}1} = 71$$

$x = 5{,}01$

$$\frac{5{,}01+2}{5{,}01-5} = \frac{7{,}01}{0{,}01} = 701$$

$x = 5{,}001$

$$\frac{5{,}001+2}{5{,}001-5} = \frac{7{,}001}{0{,}001} = 7001$$

PŘIBLIŽUJEME SE K 5Kce. OD ZHORA, FUNKČNÍ HODNOTY ROSTOU. AŽ DO NEKONEČNA

$$\boxed{\lim_{x \to 5^-} \frac{x+2}{x-5}} = -\infty$$

$x = 4{,}9$

$$\frac{4{,}9+2}{4{,}9-5} = \frac{6{,}9}{-0{,}1} = -69$$

$x = 4{,}99$

$$\frac{4{,}99+2}{4{,}99-5} = \frac{6{,}99}{-0{,}01} = -699$$

$x = 4{,}999$

$$\frac{4{,}999+2}{4{,}999-5} = \frac{6{,}999}{-0{,}001} = -6999$$

NAKRESLIT GRAF FCE:

$$f(y) = \boxed{\frac{x+2}{x-5}} =$$

$$\frac{x+2-5+5}{x-5} = \frac{x-5+2+5}{x-5} = \frac{x-5+7}{x-5} =$$

$$= \frac{x-5}{x-5} + \frac{7}{x-5} =$$

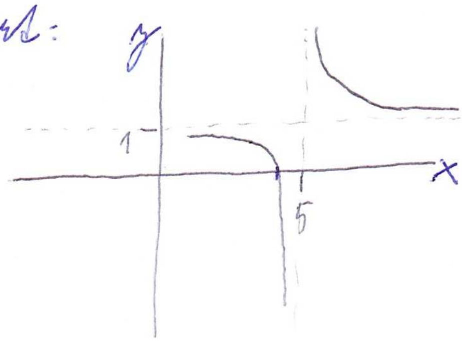
$$= 1 + \frac{7}{x-5}$$

TYP FUNKCE: LINEÁRNÍ LOMENNÁ FCE

grafem je: HYPERBOLA

V DEFINIČNÍM OBORU JSOU VŠECHNA KROMĚ 5tky

náčrt:



$$(x+2) : (x-5) = 1 + \frac{7}{x-5}$$
$$\underline{-(x-5)}$$
$$7$$

KDYŽ JDEME K 5tce ZPRAVA, TAK JDE VIDĚT ŽE FUNKCE ROSTE K NEKONEČNU.

KDYŽ JDEME K 5tce ZLEVA, FUNKCE KLESÁ, JDE K $-\infty$ (MÍNUS NEKONEČNO)

MILAN MROCZKOWSKI

YESIT.CZ

SATA150@GMAIL.COM

PRŮSEČÍKY: $P_x = ?$ $y=0$

$$0 = \frac{7}{x-5} + 1$$

$$0 = \frac{7}{x-5} + \frac{1}{1}$$

$$0 = \frac{7+(x-5)}{x-5}$$

$$0 = \frac{7+x-5}{x-5}$$

$$0 = \frac{2+x}{x-5} \quad / \cdot (x-5)$$

$$(x-5)\cdot 0 = 2+x$$

$$0 = 2+x \quad /-x$$

$$-x = 2 \quad / \cdot (-1)$$

$$x = -2$$

$$P_x[-2, 0]$$

$P_y = ?$ $x=0$

$$y = \frac{7}{0-5} + 1$$

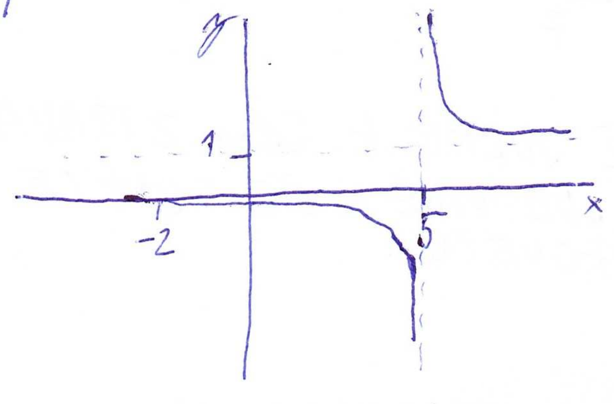
$$y = \frac{7}{-5} + \frac{1}{1}$$

$$y = \frac{7-5}{-5}$$

$$y = -\frac{2}{5}$$

$$P_y\left[0, -\frac{2}{5}\right]$$

lepší náčrt



KDYŽ DOSADÍM ČÍSLA TROCHU VĚTŠÍ NEŽ 5, CO ZHRUBA DOSTANU?

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x+2}{x-5} = \left[\frac{7}{0^+}\right] = +\infty$$

ČÍSLA TROCHU MENŠÍ NEŽ 5:

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x+2}{x-5} = \left[\frac{7}{0^-}\right] = -\infty$$

- arctg je inverzní k tg

<u>arctg</u>

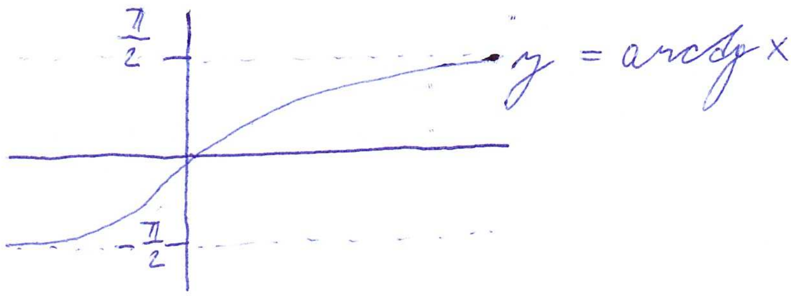
$Df \in (-\infty, +\infty)$

$Hf \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ROSTOUCÍ

OMEZENÁ (protože: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

NÁČRT:



$$\lim_{x\to -1^+} \text{arctg} \frac{1}{1+x} = \left[\text{arctg} \frac{1}{0^+}\right] = [\text{arctg}\, \infty] = \frac{\pi}{2}$$

BERU ČÍSLA
(-0,9)
(-0,99)
(-0,999)
atd.

FUNKCE ROSTE, ALE JE OMEZENÁ V $\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to -1^-} \text{arctg} \frac{1}{1+x} = \left[\text{arctg} \frac{1}{0^-}\right] = [\text{arctg}(-\infty)] = -\frac{\pi}{2}$$

(-1,1)
(-1,01)
(-1,001)
atd.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} - x} = \left[e^{\frac{1}{0^+}} - 0^+ \right] = \left[e^{\infty} \right] = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} - x} = \left[e^{\frac{1}{0^-}} - 0^- \right] = \left[e^{-\infty} \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{e^{\infty}} \right] = \left[\frac{1}{\infty} \right] = \underline{\underline{0}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+3}\right)^{-x}} = \left[1^{-\infty}\right] = \text{SUBSTITUCE}$$

$$1+\frac{1}{2x+3} = \overbrace{1+\frac{1}{k}}^{\text{PRO SUBSTITUCI}} \quad \Big| -1$$

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{k} \quad \Big| \cdot (2x+3)$$

$$1 = \frac{2x+3}{k} \quad \Big| \cdot k$$

$$k = 2x+3 \quad \Big| -2x$$

$$-2x+k = 3 \quad \Big| -k$$

$$-2x = 3-k \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$2x = k-3$$

$$x = \frac{k-3}{2}$$

$$k = 2x+3$$
$$k = [2\cdot\infty+3]$$
$$k = \infty$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\frac{k-3}{2}} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\frac{k}{2}+\frac{3}{2}} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\frac{k}{2}} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \cdot 1 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x^2-3x-4)}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x^2-3x-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} =$$

Poznámka:

1. Zjistíme, zda před x^2 není číslo, kterým se násobí, například 3 * x^2, pokud není pokračujeme 2. bodem.
2. Zjistíme, zda po dosazení hodnoty za x dostaneme výsledek rovnice nulový. Po dosazení hodnoty 4 za x, je výsledek 0.
3. Postupujeme dle návodu níže:

$$(x^2-3x-4)$$

Z LIMITY DOSADÍM 4.

$$(4^2-12-4) \quad (=0)$$

$$\Rightarrow -4 \text{ SOUČIN KOŘENŮ}$$

jen zde okopíruji znaménko -

$$(x-4)(x+1)$$

NEBO:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$

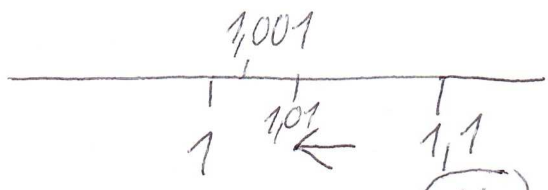
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-(-16)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$$

$$(x-4) \Rightarrow (x-4)$$
$$(x-(-1)) \Rightarrow (x+1)$$

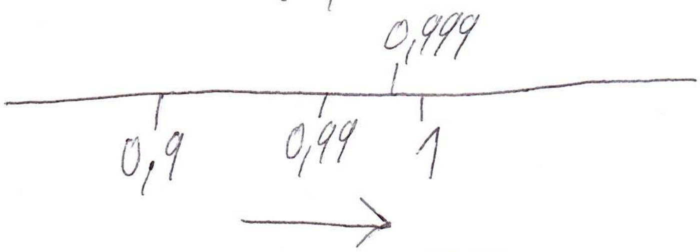
$$= \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{5\cdot 4} = \frac{1}{20}$$

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}} =$$



1^+

(1,1)
(1,01)
(1,001)



1^-

(0,9)
(0,99)
(0,999)

1−1,1 = VŽDY
1−1,01 = DOSTANU $\Rightarrow 0^-$
1−1,001 = ZÁPORNÉ ČÍSLO

$$= e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

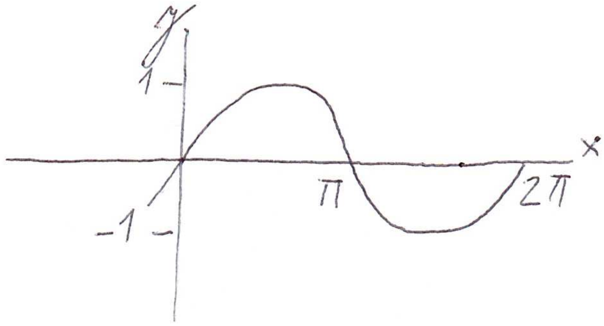
$\Downarrow$

cokoliv
na nekonečno
je nekonečno

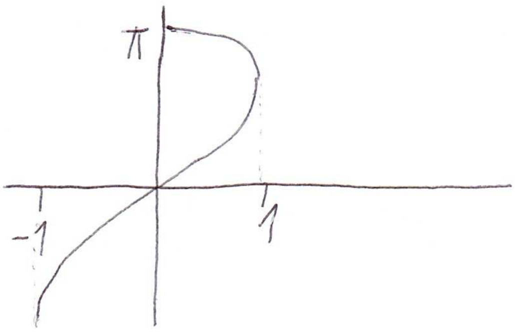
OPAKOVÁNÍ

ZJISTI D_f:

$$\boxed{\arcsin \frac{x-1}{2}}$$



$\sin x$



$\arcsin x$

$D_f = \langle -1, 1 \rangle$

PODMÍNKA PRO D_f: $\frac{x-1}{2} \geq -1 \wedge \frac{x-1}{2} \leq 1$

zároveň

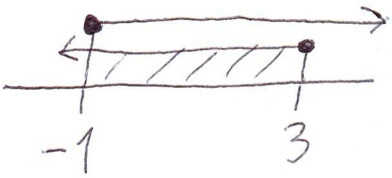
$$\frac{x-1}{2} \geq -1 \quad / \cdot 2 \qquad \wedge \qquad \frac{x-1}{2} \leq 1 \quad / \cdot 2$$

$$2 \cdot \frac{x-1}{2} \geq -2 \qquad\qquad x-1 \leq 2 \quad /+1$$

$$x \leq 3$$

$$x-1 \geq -2 \quad /+1$$

$$x \geq -1$$



$$\underline{\underline{x \in \langle -1, 3 \rangle}}$$