DETERMINANT

- je to číslo, které přiřazujeme matici
- počítá se pro matice čtvercové
- 3x3, 2x2 3x2 - nelze počítat jako determinant

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

$$\det\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \sin x \cos x - (-\cos x \sin x) =$$

$$= \sin x \cos x + \cos x \sin x =$$

$$= 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$+ a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{13}a_{22}a_{31} +$$

$$+ a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

SARRUSOVO PRAVIDLO - tento způsob výpočtu platí pouze pro 2x2 a 3x3. Pro 4x4 už ne, atd.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 4\cdot8\cdot3 + 7\cdot2\cdot6 -$$
$$-(3\cdot5\cdot7 + 6\cdot8\cdot1 + 9\cdot2\cdot4) =$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

$$= 45 + 96 + 84 - (105 + 48 + 72) =$$
$$= 225 - 225 =$$
$$= 0$$

SINGULÁRNÍ MATICE - nemá inverzní matici
- má lineárně závislé řádky
- je rovna nule

nenulová čísla: k, l, n ⇒ když udělám lineární kombinaci:

$$k(1,2,3) + l(4,5,6) + n(7,8,9) = (0;0;0)$$

"jeden řádek dokáži vynulovat"

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

KDYŽ PROHODÍM ŘÁDKY

$$\det \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

TAK SE ZMĚNÍ ZNAMÉNKO

❗ KDYŽ PŘEHODÍM ŘÁDKY, TAK MUSÍM ZMĚNIT ZNAMÉNKO

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -4$$

zvětšil se dvojnásobně

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \swarrow + \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = -2$$

DETERMINANT PŘI TÉTO ÚPRAVĚ SE NEZMĚNÍ

CÍL: VYNULOVAT POD DIAGONÁLOU

POUŽÍVÁME ROVNÁ SE, PROTOŽE JE TO ČÍSLO

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-4) \\ \swarrow + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \cdot (-7) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \cdot (-2) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0$

PROHODIL JSEM ŘÁDKY, MUSEL JSEM ZMĚNIT ZNAMÉNKO

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-1) = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-2) \; + = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \; + =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{11}{3} = 9 \cdot \frac{11}{3} = \frac{99}{3} = 33$$

Poznámka

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{1} = \frac{2+9}{3} = \frac{11}{3}$$

LAPLACEŮV ROZVOJ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 7 + 0 \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \cdot 1 - (2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot 3 + 7 \cdot 0 \cdot 0)$$

$$+ 0 \cdot 0 \cdot 7 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 - (0 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) \cdot 3) =$$

$$= 42 - 20 + (-10) + 21 = 22 - 10 + 21 =$$

$$= 12 + 21 = 33$$

KOMBINACE OBOU PŘÍSTUPŮ VÝPOČTU DETERMINANTU

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad 1\cdot(+2) \quad 1\cdot(-3) \quad 1\cdot(-4) \quad =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -15 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot - \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -10 & -10 & -10 \\ -5 & -14 & -15 \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) =$$

DETERMINANT SE 10× ZMENŠÍ

$$= - \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -14 & -15 \end{vmatrix} \cdot (-10) =$$

$$\begin{matrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -\left[(-75 - 154 - 10) - (-55 - 70 - 30)\right] \cdot (-10) =$$

$$= -(-239 + 155) \cdot (-10) = -(-84) \cdot (-10) = 84 \cdot (-10) =$$

$$= \underline{\underline{-840}}$$

Milan Mroczkowski
sata150@gmail.com
yesit.cz

OVĚŘÍM ŘÁDKOVÝMI ÚPRAVAMI:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -15 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \quad \cdot 1 \\ + \\ + \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2) \\ + \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{vmatrix} = -[1 \cdot 5 \cdot (-6) \cdot (-28)] =$$

$$= -[-30 \cdot (-28)] =$$

$$= -(+840) =$$

$$= \underline{\underline{-840}}$$

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

KDY JE ROVNA NULE?

$$\begin{matrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$2x^2 + 9x + 12 - (18 + 3x^2 + 4x) =$$

$$= 2x^2 + 9x + 12 - 18 - 3x^2 - 4x =$$

$$= -x^2 + 5x - 6 =$$

$$= x^2 - 5x + 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{-5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \left\langle \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{matrix} \right.$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{pmatrix} = 0$$

KDY JE ROVEN NULE?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \cdot(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \cdot(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} / \cdot(-2) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} \cdot\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} =$$

podmínka $1-x^2 \neq 0$

$$1 \cdot (1-x^2) \cdot (-3) \cdot (4-x^2) = 0$$

$$\underbrace{(1-x)(1+x)}_{x=\pm 1}\,(-3)\,\underbrace{(2-x)(2+x)}_{x=\pm 2} = 0$$

výsledky

CRAMEROVO PRAVIDLO

ŘÍKÁ:
- Jak počítat soustavy rovnic pomocí soustavy determinantů.
- Nemusím znát Gausovu eliminaci.
- použitelné pouze pokud $\det A \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 4 \\ x + 2y + 2z &= 6 \\ 5x + y + 4z &= 21 \end{aligned}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot 3\cdot 2 - (1\cdot 2\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot 3\cdot 1) =$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix}$$

$$= 16 + 1 + 30 - (10 + 4 + 12) =$$

$$= 47 - 26 = 21$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 21 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{42}{21} = 2$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 5 & 21 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-21}{21} = -1$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{63}{21} = 3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Milan Mroczkowski
sata150@gmail.com **yesit.cz**

V JAKÉM PŘÍPADĚ VYJDE NULOVÝ DETERMINANT?

$$\boxed{\begin{aligned} x - y &= 5 \\ 2x - 2y &= 10 \end{aligned}}$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0}$$

MÁ NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ, ALE CRAMEROVY VZORCE DAJÍ POUZE $\frac{0}{0}$, PROBLÉM: NEJDE PARAMETRIZOVAT, NEŘEKNE JAK ŘEŠENÍ VYPADÁ

$$\boxed{\begin{aligned} x - y &= 5 \\ -x + y &= 5 \end{aligned}}$$

det A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10}{0}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10}{0}$$

NEMÁ ŘEŠENÍ

Nulou nelze dělit.

Také nemá řešení:

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x - y &= -5 \end{aligned}$$