SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

o n neznámých

Co to je lineární rovnice? Nejvyšší mocnina neznámého jedné mocnině.

Příklad, jak vypadá soustava lineární rovnice:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ -\frac{1}{8}x + \sqrt{2}y &= -5 \end{aligned}$$

GAUSOVA ELIMINAČNÍ METODA

- soustava se zapsala do maticového tvaru

rozšířená matice soustavy:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \sqrt{2} & -5 \end{array}\right)$$

až

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & . \\ 0 & 1 & . \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x = \\ y = \end{array}$$

1) PROHAZOVÁNÍ ŘÁDKŮ
2) NÁSOBENÍM ŘÁDKU (NENULOVÝM REÁLNÝM ČÍSLEM)
3) PŘIČTENÍ NÁSOBKU JEDNOHO ŘÁDKU K ŘÁDKU JINÉMU

při výpočtu: (vlnovka ~ i → šipka je správně)

GAUSOVA ELIMINAČNÍ METODA

$$\boxed{\begin{aligned} x - y + 3z &= 5 \\ -x + y + z &= -1 \\ 3x - 2y + z &= -2 \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right) \cdot 1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{4} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot (-4) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot (-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot 1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{x = -7}}$$

$$\underline{\underline{y = -9}}$$

$$\underline{\underline{z = 1}}$$

$$\begin{aligned} 1x + 0y + 0z &= -7 \\ 0x + 1y + 0z &= -9 \\ 0x + 0y + 1z &= 1 \end{aligned}$$

Milan Mroczkowski
yesit.cz
sata150@gmail.com

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

GAUSOVA ELIMINAČNÍ METODA

$$\boxed{\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x + y + 2z &= 4 \\ 4x + 3y + 3z &= 5 \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right)^{\cdot(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right)^{\cdot(-4)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & -5 & -11 \end{array}\right) \cdot (-1) \sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 4 \\ -8 \\ -3 \end{matrix}}_{b}\right)$$

(rozšířená matice o b)

$0x + 0y + 0z = -3$ NŘ

$0 \neq -3$ **soustava nemá řešení**

rozšířené
hodnost matice soustavy

$$\boxed{\begin{aligned} h(A|b) &= 3 \\ h(A) &= 2 \ * \end{aligned}}$$

hodnost matice soustavy

FROBENIOVA VĚTA
- říká, kdy má soustava řešení
- pokud hodnost rozšířené matice soustavy se rovná hodnosti matice soustavy, tak soustava má řešení.

Poznámka, lze zapsat i jako $h(A|\vec{b})$, vektor nad b se psát nemusí, protože se na to můžeme koukat jako na matici.

GAUSOVA ELIMINAČNÍ METODA

$$\boxed{\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x \quad\; + z &= 5 \\ 2x + 5y + 2z &= 5 \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{array}\right) \cdot 5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}\right)$$

NMŘ

nekonečně mnoho řešení

"0 = 0"

$$x + y + z = 4$$
$$-y = 1$$

$$-y = 1 \quad / \cdot (-1)$$
$$\underline{y = -1}$$

$$x - 1 + z = 4 \quad / + 1$$
$$x + z = 5 \quad / - z$$
$$\underline{x = 5 - z}$$

Zvolím si za z parametr $\underline{z = s}$ $s \in R$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 5 - s \\ y &= -1 \\ z &= s \quad s \in R \end{aligned}}$$

JE ZDE OMEZENÍ, MOŽNÁ ŘEŠENÍ JSOU:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-s \\ -1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

KONTROLA

- jedno z řešení soustavy rovnic.

$$x = 5 - s$$
$$y = -1$$
$$z = s \qquad s \in R$$

Dosadím za s např.: 0.

$$x = 5$$
$$y = -1$$
$$z = 0$$

Dosadím do zadání:

$$x + y + z = 4 \qquad 5 - 1 + 0 = 4$$
$$x + z = 5 \qquad 5 + 0 = 5$$
$$2x + 5y + 2z = 5 \qquad 2\cdot 5 + 5\cdot(-1) + 2\cdot 0 = 5$$

OK :-)

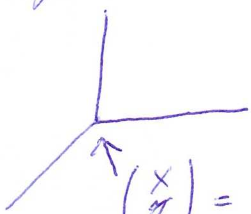
ROVNICE ROVIN

roviny:

$$x - y + 3z = 5$$
$$-x + y + z = -1$$
$$3x - 2y + z = -2$$

Hledám vzájemnou polohu těchto tří rovin:

3 roviny mají 1 společný bod:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Když soustava nemá řešení, tak jsou roviny rovnoběžný (jako: rovina podlahy, rovina stropu)

Když soustava má nekonečně mnoho řešení (chytnu sešit za prostřední list). Roviny se protínají v jedné přímce.

GAUSOVA ELIMINAČNÍ METODA

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}}$$

Soustava má pouze 2 řádky, jsou poddimenzované, protože řádky chybí. Proto doplním nulami.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot (-3) \; + \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot 2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

NMŘ

nekonečně mnoho řešení

Pozn.: $\frac{3}{2} - \frac{1}{1} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

$-\frac{9}{2} + \frac{1}{1} = \frac{-9+2}{2} = -\frac{7}{2}$

$-\frac{9}{2} + \frac{4}{1} = \frac{-9+8}{2} = -\frac{1}{2}$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -1$$

parametry:

$$x_3 = t \qquad t \in R$$

$$x_4 = s \qquad s \in R$$

$$x_2 - 7t + 2s = -1$$

$$x_2 = -1 + 7t - 2s$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}t$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1 + 7t - 2s) - \frac{3}{2}t$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}t - s - \frac{3}{2}t$$

$$x_1 = 1 - s + 2t$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - s + 2t \\ -1 + 7t - 2s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

GAUSOVA ELIMINAČNÍ METODA

SOUSTAVY S PARAMETREM

$$\boxed{\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ x - y + 3z &= 0 \\ x - 4y - 3z &= k \end{aligned} \qquad k \in R \text{ parametr}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & k \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & k \end{array}\right) \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -1+k \end{array}\right) 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3+k \end{array}\right)$$

nulová řada má řešení nekonečně mnoho nebo nemá řešení

$$-3+k=0$$
$$k=3$$

$k = 3 \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

$k \neq 3 \Rightarrow$ nemá řešení

Když má nekonečně mnoho řešení, tak zavádím parametr.

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{z = t} \Rightarrow \quad t \in R$$

$$y + 2t = -1$$
$$\underline{y = -1 - 2t}$$

$$x - 2(-1-2t) + t = 1$$
$$x + 2 + 4t + t = 1$$
$$x + 2 + 5t = 1$$
$$x = 1 - 2 - 5t$$
$$\underline{x = -1 - 5t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5s \\ -1-2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

POKUD JE SOUSTAVA HOMOGENNÍ – MÁ SAMÉ NULY NA PRAVÉ STRANĚ, TAK EXISTUJE VŽDY JEDNO ŘEŠENÍ

$$
\begin{aligned}
x + y - z &= 0 \\
ay - z &= 0 \\
x + y + az &= 0
\end{aligned}
$$

*** ještě použiji na další stránce**

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 0 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{1+a} \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot 1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot 1 \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{a} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)
$$

$1 + a = 0$

$\underline{a = -1}$ nekonečně mnoho řešení

$\underline{a \neq -1}$ protože je homogenní, tak má 1 řešení

$a = 0$ nekonečně mnoho řešení

Kdy má jedno řešení?
Odpověď: $\underline{\underline{a \in R \setminus \{-1, 0\} \text{ 1 ŘEŠENÍ } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

Pozn: viz předchozí stránka *

$$
\begin{aligned}
x + y - z &= 0\\
0y - z &= 0\\
z &= 0
\end{aligned}
$$

$\xleftarrow{\text{dostanu}}$ $a = 0$

1+0 = 1

NMŘ

$\underline{z = 0}$

$\underline{y = s}$ $s \in R$

$x + s - 0 = 0$

$\underline{x = -s}$

$\boxed{\begin{aligned} z &= 0\\ y &= s\\ x &= -s \quad s \in R \end{aligned}}$ $a = 0$

=

$$
\begin{aligned}
x + y - z &= 0\\
-1y - z &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

dosadím

$a = -1$

NMŘ

1-1=0

$\underline{z = s}$ $s \in R$

$x - s - s = 0 \quad /+2s$

$\underline{x = 2s}$

$-y - s = 0$

$-y = s \quad / \cdot (-1)$

$\underline{y = -s}$

$\boxed{\begin{aligned} z &= s\\ y &= -s\\ x &= 2s \quad s \in R \end{aligned}}$ $a = -1$