TAYLORŮV POLYNOM

POTŘEBUJI ZNÁT: NĚJAKOU FUNKCI $f(x)$

BOD x_0

STUPEŇ POLYNOMU n (JAKÁ BUDE MAXIMÁLNÍ MOCNINA)

FUNKČNÍ HODNOTA V BODE x_0 — DERIVACE FCE V BODĚ x_0

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

POLYNOM n-TÉHO STUPNĚ V BODĚ x_0, KTERÝ ODPOVÍDÁ FUNKCI f.

NEJVYŠŠÍ DERIVACE KTEROU BUDEME POČÍTAT JE n-tá.

JESTLIŽE MÁM NĚJAKOU FUNKCI JAKKOLIV OŠKLIVOU, TEN POLYNOM JE NĚJAKÁ APROXIMACE FCE, TO ZNAMENÁ PŘIBLÍŽENÍ PRÁVĚ V OKOLÍ TOHO BODU x_0.

PROČ ZROVNA POLYNOMY?
POLYNOMY JSOU JEDNODUCHÉ FCE, POUŽÍVAJÍ POUZE DVĚ OPERACE: SČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ.

TAYLOROVY POLYNOMY JSOU SCHOPNY PŘIBLÍŽIT LIBOVOLNOU FUNKCI JAKOU CHCI A TO LIBOVOLNĚ PŘESNĚ JAK JÁ POTŘEBUJI.

K ČEMU SE POUŽÍVÁ? **TAYLORŮV POLYNOM SLOUŽÍ K URČOVÁNÍ FUNKČNÍCH HODNOT NĚJAKÉ FUNKCE JAK POTŘEBUJEME PŘESNĚ**

PŘÍKLAD: $f(x) = \sqrt{x}$ $= x^{\frac{1}{2}}$

$x_0 = 4$

$T_3(x)$

$T_n(x)$

$n = 3$

① DERIVACE FCE

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)' \cdot x^{-\frac{3}{2}} + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

② DERIVACE V BODĚ x_0 (VE 4ce)

FUNKČNÍ HODNOTA

1. DERIVACE V BODĚ x_0

$$f(x_0) = f(4) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f''(x_0) = f''(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{32}$$

$$f'''(x_0) = f'''(4) = \frac{3}{8} \cdot 4^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^5}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{32} = \frac{3}{256}$$

$$T_3(x) = 2 + \frac{\frac{1}{4}}{1!}(x-4)^1 + \frac{-\frac{1}{32}}{2!}(x-4)^2 + \frac{\frac{3}{256}}{3!}(x-4)^3 =$$

$$= 2 + \frac{1}{4} \cdot 1\,(x-4) + \left(-\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2}\right)(x-4)^2 + \left(\frac{3}{256} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}\right)(x-4)^3 =$$

$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

NEPOTŘEBUJI ROZNÁSOBIT

TOTO JE TVAR TAYLOROVA POLYNOMU 3. STUPNĚ

JAK BY TO VYPADALO, KDYBYCH SPOČÍTAL FUNKČNÍ HODNOTU TAYLOROVA POLYNOMU V 5ce ?

(DOSADÍM DO TVARU TAYLOROVA POLYNOMU 3. STUPNĚ)

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

$$T_3(5) = 2 + \frac{1}{4}(5-4) - \frac{1}{64}(5-4)^2 + \frac{1}{512}(5-4)^3 =$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} = \frac{1145}{512} = 2{,}236328125$$

TAYLORŮV POLYNOM V 5ce NÁM HODIL FUNKČNÍ HODNOTU: 2,236 328 125. TEĎ ZKUSÍM DÁT DO KALKULAČKY ODMOCNINU Z 5ti: $\sqrt{5}$, COŽ JE HODNOTA: 2,236067977. NAŠI FUNKCI ODMOCNINU JSME ODHADOVALI TAYLOROVÝM POLYNOMEM FUNKCÍ POLYNOMICKOU. JAK PŘESNĚ SE MI TO PODAŘILO URČIT POMOCÍ TOHO POLYNOMU?

$$T_3(5) = \underline{2{,}236}\,328125$$

$$\sqrt{5} = \underline{2{,}236}\,067977$$

SHODUJE SE NA 3 DESETINNÁ MÍSTA, VYZNAČIL JSEM CO SE SHODUJE.

POLYNOM JE JEDNODUŠŠÍ NEŽ ODMOCNINA, TAYLORŮV POLYNOM JE ZDE SCHOPEN ODMOCNINU PŘIBLÍŽIT NA 3 DESETINNÁ MÍSTA.

JAK BY TO VYPADALO, KDYBYCH SPOČÍTAL FUNKČNÍ HODNOTU TAYLOROVA POLYNOMU ve 4,5 ?

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

$$T_3(4{,}5) = 2 + \frac{1}{4}(4{,}5-4) - \frac{1}{64}(4{,}5-4)^2 + \frac{1}{512}(4{,}5-4)^3 =$$

$$= \frac{2}{1} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{512}\cdot\frac{1}{8} = \frac{8689}{4096} =$$

$$= \underbrace{2{,}1213}3{,}37891$$

$$\sqrt{4{,}5} = \underbrace{2{,}1213}{,}20344$$

TROCHU BLÍŽ JSME SE PŘIBLÍŽILI KE 4ce ($x_0 = 4$), UŽ SE SHODUJEME NA 4 DESETINNÁ MÍSTA.

JAK BY TO VYPADALO, KDYBYCH SPOČÍTAL FUNKČNÍ HODNOTU TAYLOROVA POLYNOMU ve 3,9 ?

$$T_3(3{,}9) = \underbrace{1{,}9748417}{,}97$$

$$\sqrt{3{,}9} = \underbrace{1{,}9748417}{,}66$$

SHODA NA 7 DESETINNÝCH MÍST, KDYBYCH SE PŘIBLÍŽIL VÍCE, TAK POMOCÍ TĚCHTO VÝPOČTŮ RUČNÍM POČÍTÁNÍM, JSEM SCHOPEN DOSTAT SE NA PŘESNĚJŠÍ ÚDAJE NEŽ KALKULAČKA, PROTOŽE KALKULAČKA JE OMEZENA POČTEM DESETINNÝCH MÍST.

PŘÍKLAD:

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

ROZLOŽ POLYNOM NA CELÉ NEZÁPORNÉ MOCNINY DVOJČLENU $x+1$.

1. MUSÍM URČIT n.
2. MUSÍM URČIT V JAKÉM BODĚ TEN POLYNOM JAKOBY POČÍTÁ

JAKÉHO STUPNĚ MUSÍ BÝT POLYNOM?

3tího, PROTOŽE MÁME x^3, TEDY NEMÁME JIŽ 4-TÉHO ATD. $n = 3$

V JAKÉM BODĚ? -1 PROČ?

V NAŠEM PŘEDPISU JE: $x - x_0$

ROZKLÁDÁME NA MOCNINY $x+1$

$$x - x_0 = x + 1 \quad / -x$$

$$-x_0 = 1 \quad / \cdot (-1)$$

$$\underline{x_0 = -1}$$

$f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ $\quad f(x_0) = 5$

$f'(x) = 3 + 10x - 6x^2$ $\quad f'(x_0) = -13$

$f''(x) = 10 - 12x$ $\quad f''(x_0) = 22$

$f'''(x) = -12$ $\quad f'''(x_0) = -12$

$$T_3 = 5 + \frac{-13}{1!}[x-(-1)]^1 + \frac{22}{2!}[x-(-1)]^2 + \frac{-12}{3!}[x-(-1)]^3 =$$

$$= 5 + (-13)(x+1) + 11(x+1)^2 + (-2)(x+1)^3 =$$

$$= \underline{\underline{5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3}}$$

KONTROLA:

$$5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3 =$$

$$= 5 - 13x - 13 + 11(x^2 + 2x + 1) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) =$$

$$= 5 - 13x - 13 + 11x^2 + 22x + 11 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 2 =$$

$$= -2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$$

OK :-) ROVNÁ SE ZADÁNÍ PŘÍKLADU

SPOČÍTEJ $\sqrt[3]{30}$ pomocí TAYLOROVA POLYNOMU stupně 2.

Co potřebuji pro Taylorův polynom?

- funkci
- stupeň
- v jaké hodnotě se bude fce. přibližovat

ZE ZADÁNÍ JE MI JASNÉ, JAKOU FUNKCI POUŽIJI: $\sqrt[3]{x}$ PROTOŽE SE CHCI PŘIBLIŽOVAT K $\left(\sqrt[3]{30}\right)$ TŘETÍ ODMOCNINĚ ZE 30ti, PRO STUPEŇ 2 VIZ ZADÁNÍ.

ABYCHOM MOHLI Z HLAVY URČIT FUNKČNÍ HODNOTU X, TAK BUDE NEJSNADŠÍ POČÍTAT TAYLORŮV POLYNOM VE 27, PROTOŽE $\sqrt[3]{27} = 3$.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} \\ n &= 2 \\ x_0 &= 27 \end{aligned}}$$

POZNÁMKA, MEZIVÝP.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{1} = \frac{1-3}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} - \frac{1}{1} = \frac{-2-3}{3} = \frac{-5}{3}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \cdot\ 9 \\ \hline 2187 \end{array}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}\right)' \cdot x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{5}{3}}$$

$$f(x_0) = f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$f'(x_0) = f'(27) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27 \cdot 27}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{27}$$

$$f''(x_0) = f''(27) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27^5}} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{27}} =$$

$$= -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{243} = -\frac{2}{2187}$$

$$T_2(x) = 3 + \frac{\frac{1}{27}}{1!} (x-27)^1 + \frac{-\frac{2}{2187}}{2!} (x-27)^2 =$$

$$= 3 + \frac{1}{27}(x-27) - \frac{2}{4374}(x-27)^2$$

$$T_2(x) = 3 + \frac{1}{27}(x-27) - \frac{2}{4374}(x-27)^2$$

$$T_2(27) = 3 + \frac{1}{27}(27-27) - \frac{2}{4374}(27-27)^2 =$$

$$= 3$$

$$T_2(30) = 3 + \frac{1}{27}(30-27) - \frac{2}{4374}(30-27)^2 =$$

$$= 3 + \frac{3}{9} - \frac{18}{4\,374} =$$

$$= \frac{27+3}{9} - \frac{1}{243} =$$

$$= \frac{10}{3} - \frac{1}{243} = 3{,}3292$$

NENÍ SHODA

KALKULAČKA

$$\sqrt{30} = 5{,}477225575$$

$f''(a) > 0$ MIN

$f''(b) < 0$ MAX

a, b - podezřelé body

PŘÍKLAD:

MEZI VŠEMI KLADNÝMI ČÍSLY VYBERTE TO, JEHOŽ SOUČET S JEHO PŘEVRÁCENOU HODNOTOU JE MINIMÁLNÍ.

BUDE TO ÚLOHA NA EXTRÉM

MUSÍME POMOCÍ ZADÁNÍ SESTAVIT FUNKCI JEJÍŽ MINIMUM PŘI TOM URČUJE

MÁME NAJÍT TAKOVÉ ČÍSLO JEHOŽ SOUČET JEHO PŘEVRÁCENOU HODNOTOU JE MINIMÁLNÍ

SOUČET

MÁME FUNKCI: $S(x) = x + \frac{1}{x}$ HLEDÁME JEJÍ MINIMUM

1. DERIVACE

$$S'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 1 + (-1)\,x^{-2} =$$

$$= 1 + (-1)\,\frac{1}{x^2} =$$

$$= \underline{1 - \frac{1}{x^2}}$$

POLOŽÍM ROVNO NULE

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad / + \frac{1}{x^2}$$

$$1 = \frac{1}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$x^2 = 1$$

DVA PODEZŘELÉ BODY Z LOKÁLNÍHO EXTRÉMU, ZKONTROLUJI ZDA ODPOVÍDAJÍ ZADÁNÍ

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \cancel{-1}$$

ŠKRTNU, PROTOŽE V ZADÁNÍ JE: MEZI VŠEMI KLADNÝMI ČÍSLY, −1 NEŘEŠÍM

$$S''(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = (1)' - \left(x^{-2}\right)' = -(-2)\,x^{-3} =$$

$$= 2x^{-3} = 2\,\frac{1}{x^3} =$$

$$= \underline{\frac{2}{x^3}}$$

ABYCHOM ZJISTILI TEN EXTRÉM TAK DOSADÍM DO DRUHÉ DERIVACE PODEZŘELÝ BOD, NEBOLI SPOČÍTAT DRUHOU DERIVACI V JEDNIČCE:

$$S''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$$

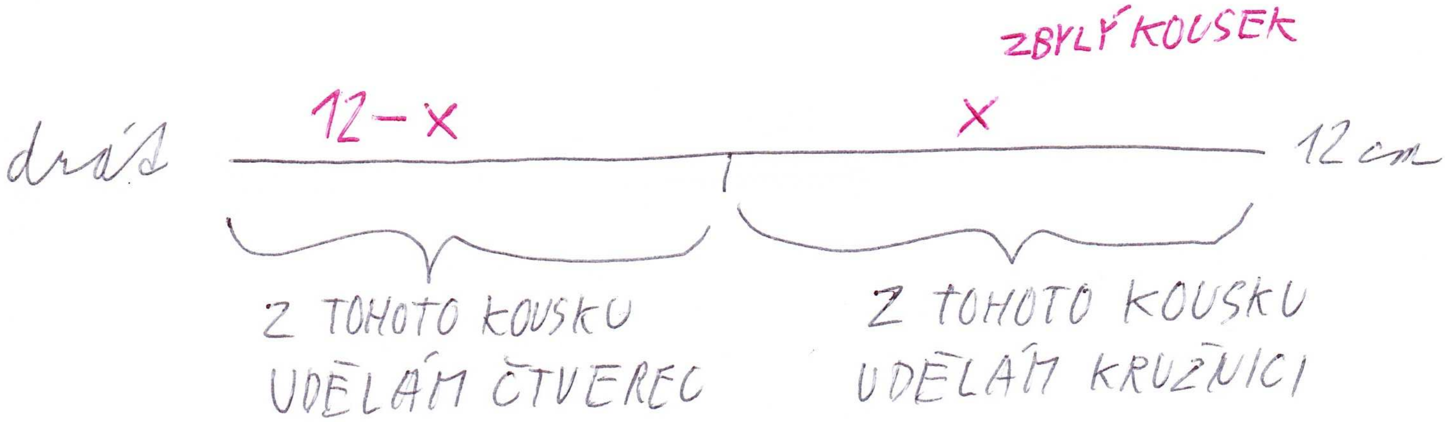
DRUHÁ DERIVACE TÉ FUNKCE JE VĚTŠÍ NEŽ NULA, TUDÍŽ V TÉ JEDNIČCE JE MINIMUM LOKÁLNÍ.

<u>HLEDANÉ ČÍSLO JE JEDNA.</u>

(ŘEŠENÍM JE JEDNA)

PŘÍKLAD: MÁM DRÁT DLOUHÝ 12 cm. TEN DRÁT NĚKDE ROZSTŘÍHNU, JEDEN KOUSEK STOČÍM DO KRUŽNICE, Z DRUHÉHO KOUSKU UDĚLÁM ČTVEREC.

KDE TEN DRÁT MÁM UŠMIKNOUT, ABY SOUČET OBSAHU TOHO KRUHU A TOHO ČTVERCE BYL MINIMÁLNÍ?



$S = a^2$ $S = \pi r^2$

JAK SE JMENUJE TA FUNKCE JEJÍŽ MINIMUM BUDU HLEDAT?

FUNKCE POPISUJÍCÍ SOUČET OBOU OBSAHŮ?

$$f = a^2 + \pi r^2$$

PROBLÉM: NEZNÁM a, r.

JELIKOŽ OHÝBÁNÍM DRÁTU VYTVÁŘÍME OBVODY (ČTVERCE, KRUŽNICE), TAK MUSÍM ZNÁT OBVODY:

$o = 4 \cdot a$

$o = 2\pi r$

VÍM, ŽE OBVOD KRUŽNICE JE $2\pi r$ NA KTERÝ JSEM SI VYHRADIL KOUSEK x, TAK MUSÍ PLATIT:

$$x = 2\pi r$$

A POTOM VÍM, ŽE OBVOD ČTVERCE JE $4 \cdot a$ A MÁM NA NĚJ VYHRAZENÝ KOUSEK $12-x$.

$$12 - x = 4a$$

VÍM, ŽE SOUČET OBSAHŮ VYPADÁ TAKTO: $f = a^2 + \pi r^2$

<u>VÝPOČTY</u>:

$$12-x = 4a \qquad x = 2\pi r$$

$$\frac{12-x}{4} = a \qquad \frac{x}{2\pi} = r$$

$$f = a^2 + \pi r^2 =$$

$$= \left(\frac{12-x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

POPISUJE SOUČET OBSAHŮ V ZÁVISLOSTI NA TOM, KDE JSEM DRÁT USTŘIHNUL.

ZKUSÍM NAJÍT EXTRÉM TÉTO FUNKCE, ZJISTIT KDE TO MÁM STŘÍHAT

(ZKUSÍM NAJÍT EXTRÉM FUNKCE f.)

$$f'(x) = \left[\left(\frac{12-x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]' =$$

$$= 2\,\frac{12-x}{4}\left(\frac{12-x}{4}\right)' + (\pi)'\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \pi\cdot\left[\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]' =$$

$$= \frac{12-x}{2}\left[(12-x)\cdot\frac{1}{4}\right]' + 0\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \pi\cdot 2\,\frac{x}{2\pi}\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)' =$$

$$= \frac{12-x}{2}\left[(12-x)'\cdot\frac{1}{4} + (12-x)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)'\right] + x\cdot\left[x\cdot\frac{1}{2\pi}\right]' =$$

$$= \frac{12-x}{2}\left[-1\cdot\frac{1}{4}\right] + x\left[(x)'\cdot\frac{1}{2\pi} + x\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)'\right] =$$

$$= \frac{12-x}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + x\cdot\frac{1}{2\pi} =$$

$$= -\frac{12-x}{8} + \frac{x}{2\pi}$$

$$-\frac{12-x}{8} + \frac{x}{2\pi} = 0 \quad /\cdot 8$$

$$-(12-x) + \frac{8x}{2\pi} = 0\cdot 8 \quad /\cdot 2\pi$$

$$-2\pi(12-x) + 8x = 0\cdot 2\pi$$

$$-24\pi + 2\pi x + 8x = 0$$

$$-24\pi = -2\pi x - 8x \quad /\cdot(-1)$$

$$24\pi = 2\pi x + 8x$$

$$24\pi = x(2\pi + 8)$$

$$x = \frac{24\pi}{2\pi+8} = \frac{12\pi}{\pi+4} \doteq 5{,}3$$

$12 - 5{,}3 = 6{,}7$

PODEZŘELÝ BOD Z EXTRÉMU

TEĎ MUSÍM UKÁZAT, ŽE V BODĚ 5,3 JE EXTRÉM.

$$f''(x) = \left[-\frac{12-x}{8} + \frac{x}{2\pi}\right]' =$$

$$= \left[\frac{-12+x}{8} + \frac{x}{2\pi}\right]' =$$

$$= \left(\frac{-12+x}{8}\right)' + \left(\frac{x}{2\pi}\right)' =$$

$$= \left[(-12+x)' \cdot \frac{1}{8} + (-12+x) \cdot \left(\frac{1}{8}\right)'\right] + \left[(x)' \cdot \frac{1}{2\pi} + x \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)'\right] =$$

$$= \underline{\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}}$$

$f'' > 0$, PROTO V BODĚ 5,3 JE MINIMUM

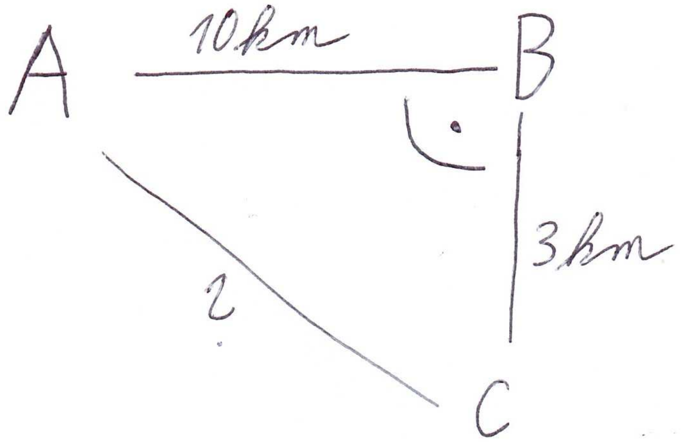
(VYŠLA DRUHÁ DERIVACE: KONSTANTNÍ FCE)

VÝSLEDEK:

ABY BYLO SPLNĚNO ZADÁNÍ, MUSÍME VZÍT NA KRUŽNICI 5,3 cm A NA ČTVEREC 6,7 cm.

PŘÍKLAD:

MĚSTO <u>B</u> JE 10 km VÝCHODNĚ OD MĚSTA <u>A</u>, MĚSTO <u>C</u> JE 3 km JIŽNĚ OD <u>B</u>. Z <u>A</u> DO <u>C</u> SE MÁ POSTAVIT DÁLNICE. CENA PŘI BUDOVÁNÍ DÁLNICE PODÉL EXISTUJÍCÍ SILNICE Z <u>A</u> DO <u>B</u> JE 4 mld. KČ ZA 1 km. CENA KDEKOLIV JINDE JE 5 mld. KČ ZA 1 km. JAK DÁLNICI POSTAVIT, ABYCHOM MĚLI CO NEJNIŽŠÍ NÁKLADY?



KOLIK BY STÁLA DÁLNICE PŘÍMO Z <u>A</u> DO <u>C</u>?

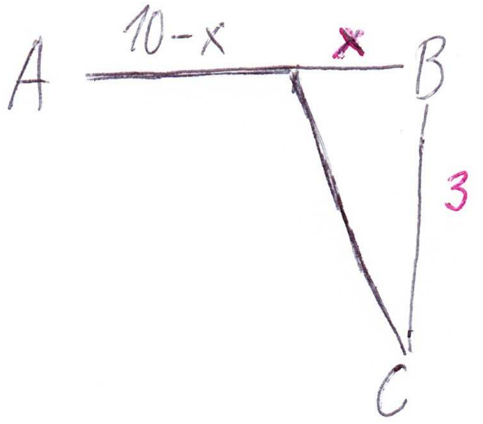
$$\overset{\text{mld.}}{5} \cdot \sqrt{10^2 + 3^2} = 5 \cdot \sqrt{109} \doteq 52 \text{ mld.}$$

POZNÁMKA: $c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

KOLIK BY STÁLA DÁLNICE Z $A \to B \to C$

$$\overset{\text{mld}}{4} \cdot 10 + \overset{\text{mld}}{5} \cdot 3 = 55 \text{ mld.}$$



PŘIDÁM K SILNICI NĚJAKÉ PRUHY, A PAK POSTAVÍM SILNICI K C.

KOLIK NÁS BUDE STÁT?

náklady

$$N(x) = 4 \cdot (10-x) + 5\sqrt{x^2+3^2} =$$

$$= 4(10-x) + 5\sqrt{x^2+9}$$

$$N'(x) = \left[(40-4x) + 5\sqrt{x^2+9}\right]' =$$

$$= (40-4x)' + (5)' \cdot \sqrt{x^2+9} + 5 \cdot \left(\sqrt{x^2+9}\right)' =$$

$$= (-4) + 5\left[(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= -4 + 5\left[\frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+9)'\right] =$$

$$= -4 + 5\left[\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x\right] =$$

$$= -4 + \frac{10x}{2\sqrt{x^2+9}}$$

$$-4+\frac{10x}{2\sqrt{x^2+9}}=0 \quad /\cdot(2\sqrt{x^2+9})$$

$$-8\sqrt{x^2+9}+10x=0 \quad /+8\sqrt{x^2+9}$$

$$10x=8\sqrt{x^2+9} \quad /^2$$

UMOCŇOVÁNÍ ROVNICE NENÍ EKVIVALENTNÍ ÚPRAVA, PROTO MUSÍM UDĚLAT ZKOUŠKU, JESTLI JE 4ka ŘEŠENÍM ROVNICE

$$100x^2=64(x^2+9)$$

$$100x^2=64x^2+576 \quad /-64x^2$$

$$36x^2=576 \quad /:36$$

$$x^2=16$$

$$x=\pm\sqrt{16}$$

$$x_1=4$$

$x_2=-4$: NEVYHOVUJE, NEMŮŽU STAVĚT TÍMTO SMĚREM, NEŘEŠÍM

ZK:

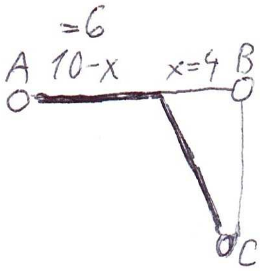
$$-4+\frac{10\cdot 4}{2\sqrt{4^2+9}}=0$$

OVĚŘÍM, ZDA VE 4. OPRAVDU MINIMUM MÁ NEBO NEMÁ:

MÁME 2 MOŽNOSTI: 1) DRUHÁ DERIVACE

2) nebo:

	$(0,4)$	$(4,10)$
$-4+\frac{10x}{2\sqrt{x^2+9}}$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$



mld km mld.

$$4\cdot 6+5\sqrt{4^2+3^2}=49 \text{ mld.}$$

ODPOVĚĎ:

NEJNIŽŠÍCH NÁKLADŮ DOSÁHNEME, KDYŽ 6 KM BUDEME STAVĚT Z BODU A PO STÁVAJÍCÍ CESTĚ A 5 KM MIMO STÁVAJÍCÍ CESTU.

Milan Mroczkowski
sata150@gmail.com
yesit.cz
yesit.eu

PŘÍKLAD:

VÝROBCE PIVA MÁ STÁLÉ TÝDENNÍ VÝDAJE 10 000 Kč A NAVÍC 200 Kč ZA KAŽDÝ SOUDEK PIVA KTERÝ VYPRODUKUJE.

URČÍ-LI VÝROBCE ZA SOUDEK PIVA x Kč, PRODÁ $500 - \frac{1}{2}x$ SOUDKŮ ZA TÝDEN.

JAK MÁ VÝROBCE NASTAVIT CENU ZA SOUDEK, ABY MĚL CO NEJVYŠŠÍ ZISK?

zisk = příjmy − výdaje

$$Z = P - V$$

$$Z = \underbrace{\left(500 - \frac{1}{2}x\right)}_{\text{POČET SOUDKŮ KTERÝ PRODÁ}} \cdot \underbrace{x}_{\text{CENA ZA 1 SOUDEK}} - \left[10\,000 + \underbrace{200}_{\text{200 ZA KAŽDÝ SOUDEK}}\underbrace{\left(500 - \frac{1}{2}x\right)}_{\text{POČET SOUDKŮ}}\right] =$$

KDY NABÝVÁ MAXIMA? (NEJVYŠŠÍ ZISK)

$$= 500x - \frac{1}{2}x^2 - \left[10\,000 + 100\,000 - 100x\right] =$$

$$= 500x - \frac{1}{2}x^2 - 10\,000 - 100\,000 + 100x =$$

$$= 600x - \frac{1}{2}x^2 - 110\,000$$

$$z'(x) = \left(600x - \frac{1}{2}x^2 - 110\,000\right)' =$$

$$= 600 - 2\frac{1}{2}x =$$

$$= 600 - x$$

$$600 - x = 0 \quad / + x$$

$$600 = x$$

↑
MĚLI BYCHOM DOSÁHNOUT
NEJVYŠŠÍCH ZISKŮ

OVĚŘÍM:

$$z''(x) = (600 - x)' =$$

$$= -1 \qquad z''(x) < 0 \quad MAX$$

VÝSLEDEK (ODPOVĚĎ)
NEJVYŠŠÍCH ZISKŮ DOSÁHNEM KDYŽ CENU NASTAVÍM
600 KČ ZA SOUDEK.